MATEMÁTICAS FINANCIERAS

INICIACIÓN

LUIS MINGUILLÓN PASCUAL

Matemáticas Financieras Iniciación

Luis Minguillón Pascual

COPYRIGHT

La licencia de este libro electrónico es para uso personal. Por lo tanto no puedes revenderlo a otras personas.

Gracias por respetar los derechos de autor.

©Luis Minguillón Pascual
08/10/2025

Prefacio

Las matemáticas financieras constituyen una herramienta esencial para comprender el mundo económico que nos rodea. A través de ellas podemos analizar el valor del dinero en el tiempo, planificar inversiones, evaluar créditos y tomar decisiones racionales que afectan tanto a nuestra vida personal como profesional. Saber matemáticas financieras no solo nos permite gestionar mejor nuestros recursos, sino también entender los mecanismos que mueven la economía moderna y, con ello, adquirir una mayor independencia y seguridad en nuestras decisiones.

He creado este libro con la convicción de que el conocimiento no debe ser un patrimonio individual, sino un bien que se comparte. Aprender y enseñar son dos actos inseparables que multiplican el saber. Creo firmemente que el conocimiento nos hace libres, porque quien comprende puede elegir, y quien elige con fundamento vive con plenitud y responsabilidad. Este libro nace, por tanto, del deseo de aportar una herramienta accesible para quienes inician su camino en las matemáticas financieras, con un enfoque claro, práctico y humano.

No puedo dejar de dedicar unas líneas a mi mujer, Marisa, cuyo apoyo constante, paciencia y aliento han sido fundamentales durante la creación de esta obra. Su comprensión y compañía han dado sentido a cada esfuerzo, y a ella le debo buena parte de la inspiración que sostiene estas páginas.

Luis Minguillón Pascual

Indice:

Parte I: Fundamentos de Matemáticas Financieras

1. Introducción a las Matemáticas Financieras 1.1 Definición y objetivos

- Definición: Rama de las matemáticas aplicadas que estudia la administración y cuantificación de recursos económicos en el tiempo.
- Objetivos principales: Facilitar la toma de decisiones financieras, determinar el valor presente y futuro de flujos de dinero, evaluar alternativas de inversión y financiamiento, medir el costo y rendimiento de operaciones financieras. 1.2 Historia y evolución de las matemáticas financieras
- Edad Antigua: Nociones en Mesopotamia y Egipto para calcular intereses de préstamos agrícolas.
- Edad Media: Comerciantes italianos y árabes registran operaciones complejas usando interés simple.
- Renacimiento: Aparición del interés compuesto y desarrollo de técnicas contables.
- Edad Moderna: Consolidación de la teoría financiera y aparición de bonos, acciones y mercados.
- Actualidad: Aplicación con *software* especializado, simulaciones de riesgo y análisis cuantitativo. 1.3 Importancia en la vida personal y empresarial
- A nivel personal: Planificación de ahorros y pensiones, evaluación de préstamos e hipotecas, decisiones sobre inversiones.
- A nivel empresarial: Determinar la rentabilidad de proyectos de inversión, gestionar créditos, optimizar la relación riesgo/rendimiento. 1.4 Principios básicos de finanzas
    1. Valor del dinero en el tiempo (TVM).
    2. Interés simple e interés compuesto.
    3. Riesgo y rendimiento.
    4. Liquidez.
    5. Equilibrio financiero (Balancear ingresos, gastos y obligaciones).

2. Conceptos Fundamentales de Interés 2.1 Interés: definición y tipos

- 2.1.1 Interés simple: Cálculo solo sobre el capital inicial.
    - Fórmula: $I = C \times i \times t$; $FV = C \times (1 + i \times t)$.
- 2.1.2 Interés compuesto: Cálculo sobre capital más intereses acumulados (método más utilizado).
    - Fórmula: $FV = C \times (1 + i)^t$. 2.2 Capital, tasa de interés y tiempo (C, i, t) 2.3 Valor presente y valor futuro (FV y PV)
- Fórmulas de Valor Presente para Interés simple y compuesto. 2.4 Descuento financiero
- Descuento simple.
- Descuento compuesto. 2.5 Tasas equivalentes (Comparación de tasas con diferentes períodos de capitalización)
- Fórmula de tasa efectiva (TE).

3. Operaciones Básicas de Matemáticas Financieras 3.1 Cálculo de montos

- Monto en Interés simple: $M = C + I$.
- Monto en Interés compuesto: $M = C \times (1 + i)^t$. 3.2 Cálculo de intereses

- Interés simple: I = C × i × t.
- Interés compuesto: I = M - C. 3.3 Descuentos y anticipos
- Descuento simple (D = C × d × t).
- Descuento comercial/bancario (DC = M × d × t). 3.4 Conversión de tasas de interés
- Tasa equivalente simple: i1 × t1 = i2 × t2.
- Tasa equivalente compuesta: (1 + i1)^t1 = (1 + i2)^t2.

Parte II: Interés Simple y Compuesto

4. Interés Simple

- Objetivo: Comprender concepto, fórmulas y aplicaciones prácticas. 4.1 Fórmulas y aplicaciones
- Fórmulas principales: Interés (I), Monto (M), Capital (C), Tasa de interés (i), Tiempo (t).
- Aplicaciones: Préstamos a corto plazo, depósitos con interés fijo, pagos diferidos. 4.2 Problemas prácticos de interés simple 4.3 Aplicaciones en préstamos y depósitos

5. Interés Compuesto

- Objetivo: Comprender concepto, fórmulas de VF/VP, capitalización periódica y uso de tablas. 5.1 Concepto y diferencia con el interés simple
- Concepto: Intereses generados se suman al capital para producir nuevos intereses ("interés sobre interés"). 5.2 Fórmulas de valor futuro y valor presente
- Valor futuro (VF): VF = C × (1 + i)^t.
- Valor presente (VP): VP = VF / (1 + i)^t.
- Interés generado (I): I = VF - C. 5.3 Capitalización periódica
- Fórmula general: VF = C × (1 + i/n)^(n × t).
- Ejemplos de capitalización: Anual (n=1), Semestral (n=2), Trimestral (n=4), Mensual (n=12). 5.4 Ejemplos y problemas prácticos 5.5 Uso de tablas financieras
- Utilidad: Evitar cálculos de potencias, consultar factores de capitalización y descuento.

6. Tasas de Interés y Equivalencias 6.1 Tasa nominal y tasa efectiva

- Tasa nominal (i_n): Tasa anunciada sin considerar capitalización.
- Tasa efectiva (i_e): Tasa real considerando la capitalización periódica.
- Relación: $i_e = (1 + i_n / m)^m - 1$. 6.2 Conversión de tasas
- Fórmulas de conversión entre nominal y efectiva. 6.3 Tasa periódica y tasa anual equivalente (TAE)

Parte III: Rentas y Anualidades

7. Rentas Financieras 7.1 Definición y clasificación

- Definición: Serie de pagos o cobros iguales, periódicos y sucesivos.
- 7.1.1 Renta ordinaria/vencida: Pagos al final de cada período.
- 7.1.3 Renta anticipada: Pagos al inicio de cada período. 7.2 Valor presente de una renta
- Fórmulas para renta ordinaria y renta anticipada. 7.3 Valor futuro de una renta
- Fórmulas para renta ordinaria y renta anticipada. 7.4 Aplicaciones prácticas
- Planificación de ahorros, préstamos, pensiones y rentas vitalicias.

8. Anualidades 8.1 Concepto y tipos de anualidades

- Tipos: Ordinaria (vencida), Anticipada, Perpetua, Diferida. 8.2 Cálculo de anualidades ordinarias y anticipadas
- Anualidad ordinaria: Fórmulas de VP y VF.
- Anualidad anticipada: Fórmulas de VP y VF (multiplicando por (1+i)). 8.3 Anualidades perpetuas y diferidas
- Anualidad perpetua: $VP = R / i$.
- Anualidad diferida: VP se calcula descontando el VP de la anualidad ordinaria. 8.4 Problemas y casos prácticos

9. Amortización de Deudas 9.1 Sistemas de amortización

- 9.1.1 Sistema francés (cuotas constantes): Interés disminuye y capital amortizado aumenta.
- 9.1.2 Sistema alemán (cuotas decrecientes): Amortización de capital constante.
- 9.1.3 Sistema americano (cuota de intereses y capital final): Solo se pagan intereses periódicamente. 9.2 Cuadro de amortización
- Elementos: Saldo inicial, Cuota, Interés, Amortización de capital, Saldo final. 9.3 Intereses y capital en cada período 9.4 Ejercicios prácticos (Incluye ejemplos de los tres sistemas).

Parte IV: Descuento Financiero

10. Descuento Simple

- Objetivo: Calcular el valor presente de un documento descontando los intereses por adelantado.
- Fórmula general: $D = F * i * t$; $V = F - D$. 10.1 Descuento Comercial (o bancario)
- Cálculo sobre el valor nominal del documento. 10.2 Descuento Racional (o matemático)
- Cálculo sobre el valor actual (valor presente). 10.3 Fórmulas y ejemplos resumidos (Comparación entre comercial y racional) 10.4 Aplicaciones en letras de cambio y pagarés

11. Descuento Compuesto

- Definición: Los intereses se descuentan de forma compuesta.
- Fórmula fundamental: $V = F / (1 + i)^n$.
- Cálculo del descuento compuesto (D_{cmp}). 11.1 Descuento Compuesto Aplicado 11.2 Descuento Compuesto con Capitalización (Ajuste para períodos fraccionarios). 11.3 Problemas Prácticos

12. Tasas de Descuento 12.1 Descuento Nominal y Efectivo

- Descuento nominal (d_n): Tasa aplicada sobre el valor nominal.
- Descuento efectivo (d_e): Tasa que refleja el descuento real respecto al valor presente. 12.2 Equivalencias de Tasas de Descuento
- Conversión de nominal a efectiva y viceversa. 12.3 Comparación con Tasas de Interés (Relación entre i y d)

Parte V: Evaluación de inversión

13. Valor Actual Neto (VAN) 13.1 Concepto y Fórmula

- Fórmula: $VAN = \sum (Flujos\ de\ Caja\ t / (1 + i)^t) - I_0$.
- Interpretación: VAN > 0 (rentable); VAN < 0 (no rentable). 13.2 Criterios de decisión de inversión

- Regla del VAN.
- Comparación de proyectos (elegir el VAN más alto).
- Relación con la Tasa Interna de Retorno (TIR). 13.3 Ejemplos prácticos

14. Tasa Interna de Retorno (TIR)

- Definición: Tasa de descuento que hace que el VAN sea igual a cero. 14.1 Definición y cálculo
- Métodos de cálculo: Prueba y error, interpolación.
- Interpretación: TIR > costo de capital (rentable). 14.2 Comparación con VAN
- Ventajas de TIR y VAN. 14.3 Problemas resueltos (Incluye método de interpolación).

15. Período de Recuperación de la Inversión (PRI)

- Objetivo: Determinar el tiempo necesario para recuperar la inversión inicial. 15.1 Método Simple
- Definición: No considera el valor del dinero en el tiempo.
- Procedimiento y fórmula para interpolar. 15.2 Método Descontado
- Definición: Considera el valor del dinero en el tiempo descontando los flujos de caja. 15.3 Aplicaciones prácticas (Evaluación de liquidez y comparación)

16. Índice de Rentabilidad (IR) 16.1 Fórmula y utilidad

- Fórmula: $IR = VP\ de\ los\ Flujos\ de\ Caja\ Futuros / Inversión\ Inicial$.
- Interpretación: IR > 1 (rentable); IR < 1 (no rentable). 16.2 Casos prácticos

Parte VI: Matemáticas Financieras Avanzadas

17. Riesgo y Rendimiento en Inversiones 17.1 Conceptos de riesgo financiero

- Tipos de riesgo: Riesgo sistemático (no se puede eliminar) y Riesgo no sistemático (se puede reducir por diversificación).
- Medidas de riesgo: Varianza, Desviación estándar y Beta (β).
- Rendimiento esperado ($E[R]$). 17.2 Modelos de evaluación de riesgo
- Modelo de Varianza y Desviación Estándar.
- Modelo de CAPM (Capital Asset Pricing Model). 17.3 Diversificación de inversiones

18. Valoración de Bonos 18.1 Tipos de bonos

- Cupón fijo, Cupón cero, Tasa variable, Bonos convertibles. 18.2 Cálculo de precio y rendimiento
- Fórmula para bonos con cupón.
- Fórmula para bonos cupón cero. 18.3 Bonos con descuento y prima
- Condiciones para descuento ($P < F$) y prima ($P > F$).

19. Valoración de Acciones 19.1 Modelos de dividendos

- Modelo general de valoración por dividendos (VP de dividendos futuros).
- Valoración con dividendos constantes (Perpetuidad). 19.2 Modelos de crecimiento constante (Modelo de Gordon-Shapiro)
- Fórmula: $P_0 = D_1 / (r - g)$.
- Cálculo de crecimiento variable (ejemplo paso a paso). 19.3 Aplicaciones prácticas

- Determinación de si una acción está sobrevalorada o subvalorada.

20. Operaciones Financieras con Títulos 20.1 Letras de cambio y pagarés

- Características y diferencias clave. 20.2 Descuento bancario
- Fórmula del descuento simple bancario.
- Fórmula del descuento compuesto (utilizado por el banco). 20.3 Cálculo de rendimientos
- Rendimiento simple: $i = D / V * (360 / t)$.

21. Matemática Financiera Internacional 21.1 Tipos de cambio

- Tipos principales: Directo, Indirecto, Al contado (*spot*), A plazo (*forward*). 21.2 Operaciones con monedas extranjeras
- Fórmulas básicas de conversión. 21.3 Interés y descuento en mercados internacionales
- Aplicación de fórmulas de interés simple, compuesto y descuento en moneda extranjera.

Parte VII: Herramientas y Aplicaciones

22. Uso de Tablas Financieras

- Utilidad: Simplificar cálculos de valor presente, valor futuro y anualidades. 22.1 Tablas de valor presente (Factores $1 / (1 + i)^n$) 22.2 Tablas de valor futuro (Factores $(1 + i)^n$) 22.3 Tablas de anualidades (Factores para VP y VF de anualidad ordinaria)

23. Uso de Calculadoras y Software Financiero 23.1 Calculadoras Financieras

- Funciones básicas comunes: VF, VP, Pago de anualidad (R), Tasa de interés (i). 23.2 Hojas de Cálculo (Excel, Google Sheets)
- Funciones financieras más utilizadas: VF(), VA(), PAGO(), TASA(). 23.3 Software especializado
- Ejemplos: MATLAB, R (Finance packages), Python (NumPy, Pandas), SAP, Bloomberg Terminal.
- Ventajas del software: Precisión, automatización y simulación.

24. Casos Prácticos y Aplicaciones 24.1 Presupuesto personal

- Componentes básicos: Ingresos, gastos fijos y variables, ahorro e inversión. 24.2 Créditos y préstamos
- Elementos básicos: Capital, tasa, plazo, cuota.
- Fórmula de cuota (anualidad ordinaria). 24.3 Planificación de inversiones
- Parámetros principales: Rentabilidad esperada, riesgo, horizonte temporal, liquidez. 24.4 Evaluación de proyectos financieros
- Métodos: Valor Actual Neto (VAN), Tasa Interna de Retorno (TIR), Periodo de recuperación (*Payback*).

Parte VIII: Anexos

25. Glosario de Términos Financieros

- Términos clave: Activo, Amortización, Anualidad, Bonos, Capitalización, Descuento, Dividendos, Interés, Liquidez, Valor presente (VP), Valor futuro (VF), etc..

26. Fórmulas Matemáticas Financieras

- Resumen de fórmulas de: Interés simple y compuesto, Tasa efectiva anual, Anualidades (VP y VF), Descuento simple, Rendimiento de un bono, Tipo de cambio.

27. Tablas Financieras

- Ejemplos de tabla de valor presente y valor futuro.

28. Ejercicios y Problemas Resueltos

- Ejercicios de cálculo de VF compuesto, VP, VP y VF de anualidades, Rendimiento de un bono, Tipo de cambio y Descuento de un pagaré.

29. Bibliografía Recomendada

- Referencias académicas sobre Administración Financiera, Finanzas Corporativas e Inversiones.

Parte I: Fundamentos de Matemáticas Financieras

1. Introducción a las Matemáticas Financieras

1.1 Definición y objetivos

Definición:
Las Matemáticas Financieras son una rama de las matemáticas aplicadas que estudia cómo administrar y cuantificar los recursos económicos en el tiempo. Permiten calcular el valor del dinero, los intereses, las inversiones, los créditos, las amortizaciones y otros instrumentos financieros, considerando el efecto del tiempo sobre el dinero.

Objetivos principales:

1. Facilitar la toma de decisiones financieras a nivel personal y empresarial.
2. Determinar el valor presente y futuro de flujos de dinero.
3. Evaluar alternativas de inversión y financiamiento.
4. Medir el costo y rendimiento de operaciones financieras.

Ejemplo práctico:
Si un banco ofrece un interés del 5% anual, las matemáticas financieras permiten calcular cuánto dinero tendrás después de 3 años al depositar 1.000 euros.

1.2 Historia y evolución de las matemáticas financieras

- **Edad Antigua:** Las primeras nociones aparecen en Mesopotamia y Egipto, donde se usaban tablas de multiplicar y fracciones para calcular intereses de préstamos agrícolas.
- **Edad Media:** Comerciantes italianos y árabes empezaron a registrar operaciones financieras complejas, usando conceptos de interés simple.
- **Renacimiento:** Aparición del interés compuesto y desarrollo de técnicas contables más avanzadas.
- **Edad Moderna:** Consolidación de la teoría financiera, aparición de bonos, acciones y mercados de capitales.
- **Actualidad:** Las matemáticas financieras se aplican con software especializado, simulaciones de riesgo y análisis cuantitativo de inversiones.

Ejercicio 1:
Investiga un ejemplo histórico de interés simple usado en la Edad Media y explica cómo se calculaba.

Solución sugerida:
Los comerciantes italianos del siglo XIV prestaban dinero a agricultores cobrando un 10% anual. Si un agricultor pedía prestado 100 florines, después de 1 año debía devolver 110 florines (100 + 10% de 100).

1.3 Importancia en la vida personal y empresarial

A nivel personal:

- Planificación de ahorros y pensiones.
- Evaluación de préstamos, hipotecas y tarjetas de crédito.
- Decisiones sobre inversiones como depósitos a plazo, acciones o fondos.

A nivel empresarial:

- Determinar la rentabilidad de proyectos de inversión.
- Gestionar créditos y financiamiento de la empresa.
- Optimizar la relación entre riesgo y rendimiento financiero.

Ejercicio 2:
Supongamos que quieres ahorrar 500 euros para comprar un ordenador dentro de 2 años en un depósito que paga 4% anual de interés compuesto. ¿Cuánto dinero necesitas depositar hoy?

Solución:
Fórmula del valor presente: PV = FV / (1 + i)^n
PV = 500 / (1 + 0,04)^2
PV = 500 / 1,0816 ≈ 462,01 euros
Debes depositar aproximadamente 462,01 euros.

1.4 Principios básicos de finanzas

1. **Valor del dinero en el tiempo (TVM, Time Value of Money):**
   1 euro hoy vale más que 1 euro mañana, debido al potencial de generar intereses.
2. **Interés simple e interés compuesto:**
   - **Interés simple:** Se calcula solo sobre el capital inicial.
     Fórmula: I = C × i × n
   - **Interés compuesto:** Se calcula sobre el capital más los intereses acumulados.
     Fórmula: FV = C × (1 + i)^n

3. **Riesgo y rendimiento:**
   Todo rendimiento esperado implica un nivel de riesgo asociado.
4. **Liquidez:**
   Capacidad de convertir un activo en efectivo sin pérdida de valor significativo.
5. **Equilibrio financiero:**
   Las decisiones financieras deben balancear ingresos, gastos y obligaciones de pago.

Ejercicio 3:
Calcula el interés que genera un capital de 800 euros a un interés simple del 6% anual durante 3 años.

Solución:
I = C × i × n = 800 × 0,06 × 3 = 144 euros

Ejercicio 4:
Calcula el valor futuro de 800 euros a interés compuesto del 6% anual durante 3 años.

Solución:
FV = C × (1 + i)^n = 800 × (1 + 0,06)^3 = 800 × 1,191016 ≈ 952,81 euros

Ejercicio 5:
Si un préstamo de 1.200 euros se devuelve en 2 años con interés compuesto del 5%, ¿cuál será el monto total a pagar?

Solución:
FV = 1.200 × (1 + 0,05)^2 = 1.200 × 1,1025 ≈ 1.323 euros

Ejercicios de repaso (con solución)

Ejercicio 6:
¿Qué capital inicial necesitas para tener 2.000 euros en 5 años si el depósito paga 3% anual compuesto?
Solución:
PV = FV / (1 + i)^n = 2.000 / (1 + 0,03)^5 = 2.000 / 1,159274 ≈ 1.725,08 euros

Ejercicio 7:
Un inversor deposita 1.500 euros a interés simple de 4% anual durante 4 años. ¿Cuánto interés ganará?
Solución:
I = C × i × n = 1.500 × 0,04 × 4 = 240 euros

Ejercicio 8:
Si el interés compuesto anual es del 7% y el capital inicial es de 2.000 euros, ¿cuánto habrá al cabo de 6 años?
Solución:
FV = 2.000 × (1 + 0,07)^6 = 2.000 × 1,50073 ≈ 3.001,46 euros

---

2. Conceptos Fundamentales de Interés

2.1 Interés: definición y tipos

El interés es la **remuneración que se paga por el uso de dinero prestado** durante un período determinado. Es un concepto fundamental en finanzas y economía. Dependiendo de la forma en que se calcule, el interés puede ser **simple o compuesto**.

2.1.1 Interés simple

El **interés simple** se calcula únicamente sobre el **capital inicial**, sin acumular los intereses generados en períodos anteriores.

Fórmula:
$I = C \times i \times t$

Donde:

- I = interés
- C = capital inicial
- i = tasa de interés (en decimal, por ejemplo 5% = 0.05)
- t = tiempo (en años, meses, etc., según la unidad de la tasa)

Valor futuro con interés simple:
$FV = C + I = C \times (1 + i \times t)$

Ejemplo 1:
Si se prestan 1000 € al 5% anual durante 3 años con interés simple:
$I = 1000 \times 0.05 \times 3 = 150$ €
$FV = 1000 + 150 = 1150$ €

Ejercicio 1:
Calcular el interés y valor futuro de un capital de 2000 € al 8% anual durante 4 años usando interés simple.

Solución:
$I = 2000 \times 0.08 \times 4 = 640$ €
$FV = 2000 + 640 = 2640$ €

2.1.2 Interés compuesto

El **interés compuesto** se calcula sobre el **capital inicial más los intereses acumulados de períodos anteriores**. Es el método más utilizado en la práctica financiera.

Fórmula:
FV = C × (1 + i)^t

Donde:

- FV = valor futuro
- C = capital inicial
- i = tasa de interés por período
- t = número de períodos

Ejemplo 2:
Si se invierten 1000 € al 5% anual durante 3 años con interés compuesto:
FV = 1000 × (1 + 0.05)^3 = 1000 × 1.157625 ≈ 1157.63 €

Ejercicio 2:
Calcular el valor futuro de 1500 € invertidos al 6% anual durante 5 años con interés compuesto.

Solución:
FV = 1500 × (1 + 0.06)^5 = 1500 × 1.338225 ≈ 2007.34 €

2.2 Capital, tasa de interés y tiempo

- **Capital (C):** cantidad de dinero inicial.
- **Tasa de interés (i):** porcentaje que se cobra o paga por el uso del capital.
- **Tiempo (t):** duración de la inversión o préstamo.

Ejemplo 3:
Si quieres ganar 300 € de interés en un año a una tasa del 10% con interés simple, ¿cuál debe ser el capital?
C = I / (i × t) = 300 / (0.10 × 1) = 3000 €

Ejercicio 3:
Se desea obtener 500 € de interés simple en 2 años con una tasa del 8%. ¿Cuál debe ser el capital inicial?

Solución:
C = 500 / (0.08 × 2) = 500 / 0.16 = 3125 €

2.3 Valor presente y valor futuro

- **Valor futuro (FV):** cantidad de dinero que se tendrá en el futuro después de aplicar intereses.
- **Valor presente (PV):** cantidad de dinero actual que, invertida a una tasa determinada, se convertirá en un monto futuro.

Fórmulas:

- Interés simple: PV = FV / (1 + i × t)
- Interés compuesto: PV = FV / (1 + i)^t

Ejemplo 4:
¿Cuál es el valor presente de 2000 € a recibir en 3 años al 5% anual compuesto?
PV = 2000 / (1 + 0.05)^3 = 2000 / 1.157625 ≈ 1728.99 €

Ejercicio 4:
Calcular el valor presente de 3000 € a recibir en 4 años al 6% anual compuesto.

Solución:
PV = 3000 / (1 + 0.06)^4 = 3000 / 1.262477 ≈ 2377.55 €

2.4 Descuento financiero

El **descuento financiero** es el cálculo de cuánto vale hoy un valor que se recibirá en el futuro descontando los intereses. Puede ser:

- **Descuento simple:** D = FV × i × t
- **Descuento compuesto:** D = FV × [1 - 1 / (1 + i)^t]

Ejemplo 5:
Se tiene un pagaré de 1000 € a cobrar en 2 años, con tasa de descuento simple del 5%.
D = 1000 × 0.05 × 2 = 100 €
PV = 1000 - 100 = 900 €

Ejercicio 5:
Calcular el valor presente de un pagaré de 2000 € a cobrar en 3 años con una tasa de descuento compuesto del 6%.

Solución:
PV = 2000 / (1 + 0.06)^3 = 2000 / 1.191016 ≈ 1680.58 €

2.5 Tasas equivalentes

Las **tasas equivalentes** permiten comparar tasas con diferentes períodos de capitalización.

Fórmula de tasa equivalente efectiva (TE):
i_efectiva = (1 + i_nominal / n)^n - 1

Donde:

- i_nominal = tasa nominal anual
- n = número de períodos de capitalización por año

Ejemplo 6:
Una tasa nominal del 12% anual capitalizable mensualmente:
i_efectiva = (1 + 0.12 / 12)^12 - 1 ≈ 0.1268 = 12.68%

Ejercicio 6:
Convertir una tasa nominal del 18% anual capitalizable trimestralmente a tasa efectiva anual.

Solución:
i_efectiva = (1 + 0.18 / 4)^4 - 1 = (1 + 0.045)^4 - 1 ≈ 1.18555 - 1 = 0.18555 ≈ 18.56%

Ejercicios finales combinados

1. Se invierten 5000 € al 7% anual durante 3 años con interés simple. Calcular I y FV.
   Solución: I = 5000 × 0.07 × 3 = 1050 €, FV = 6050 €
2. Calcular el valor presente de 4000 € a recibir en 5 años al 8% anual compuesto.
   Solución: PV = 4000 / (1 + 0.08)^5 = 4000 / 1.46933 ≈ 2724.37 €
3. Un capital de 2500 € se invierte al 6% anual compuesto durante 4 años. Calcular el valor futuro.
   Solución: FV = 2500 × (1 + 0.06)^4 = 2500 × 1.262477 ≈ 3156.19 €
4. Convertir una tasa nominal del 15% anual capitalizable semestralmente a tasa efectiva anual.
   Solución: i_efectiva = (1 + 0.15 / 2)^2 - 1 = (1.075)^2 - 1 = 1.155625 - 1 = 0.155625 ≈ 15.56%

---

3. Operaciones Básicas de Matemáticas Financieras

Objetivo de la lección:

Comprender y aplicar las operaciones básicas de matemáticas financieras, incluyendo cálculo de montos, intereses, descuentos y anticipos, así como la conversión de tasas de interés.

3.1 Cálculo de montos

Concepto:
El monto es el valor total de un capital después de acumular intereses durante un período de tiempo. Depende del tipo de interés (simple o compuesto).

Fórmulas:

1. **Interés simple:**
   Monto = Capital + Interés
   I = C × i × t
   M = C + I
   Donde:

- M = Monto final
- C = Capital inicial
- i = tasa de interés por período (decimal)
- t = tiempo (en períodos correspondientes)

2. **Interés compuesto:**
   Monto = Capital × (1 + i)^t
   Donde los símbolos son los mismos que arriba.

Ejemplos de ejercicios con solución:

Ejercicio 1:
Calcular el monto de un capital de 5,000 con interés simple del 8% anual por 3 años.

Solución:
I = C × i × t = 5,000 × 0.08 × 3 = 1,200
M = C + I = 5,000 + 1,200 = 6,200

Ejercicio 2:
Calcular el monto de un capital de 5,000 con interés compuesto del 8% anual por 3 años.

Solución:
M = C × (1 + i)^t = 5,000 × (1 + 0.08)^3
M = 5,000 × 1.259712 = 6,298.56

3.2 Cálculo de intereses

Concepto:
El interés es la ganancia que produce un capital durante un período de tiempo, ya sea por interés simple o compuesto.

Fórmulas:

- **Interés simple:** $I = C \times i \times t$
- **Interés compuesto:** $I = M - C$

Ejemplos de ejercicios con solución:

Ejercicio 3:
Un capital de 10,000 genera un interés simple de 1,500 en 2 años. Calcular la tasa de interés anual.

Solución:
$I = C \times i \times t \rightarrow 1{,}500 = 10{,}000 \times i \times 2$
$i = 1{,}500 / (10{,}000 \times 2) = 0.075 \rightarrow 7.5\%$ anual

Ejercicio 4:
Calcular el interés compuesto generado por un capital de 10,000 a una tasa del 6% anual durante 4 años.

Solución:
$M = 10{,}000 \times (1 + 0.06)^4 = 10{,}000 \times 1.262476 = 12{,}624.76$
$I = M - C = 12{,}624.76 - 10{,}000 = 2{,}624.76$

3.3 Descuentos y anticipos

Concepto:**
El descuento financiero es la reducción del valor nominal de un documento o capital al anticipar su cobro antes del vencimiento.

Fórmulas:

- **Descuento simple:** $D = C \times d \times t$
- Valor presente: $VP = C - D$
- **Descuento comercial (bancario):** $DC = M \times d \times t$
- $VP = M - DC$

Donde:

- D o DC = descuento
- VP = valor presente
- C = capital nominal
- M = monto futuro
- d = tasa de descuento
- t = tiempo

Ejemplos de ejercicios con solución:

Ejercicio 5:
Un pagaré de 2,000 se descuenta a una tasa del 5% anual por 1 año. Calcular el valor presente.

Solución:
$D = 2{,}000 \times 0.05 \times 1 = 100$
$VP = 2{,}000 - 100 = 1{,}900$

Ejercicio 6:
Un capital de 5,000 se anticipa 6 meses con un descuento comercial del 8% anual.

Solución:
$DC = 5{,}000 \times 0.08 \times 0.5 = 200$
$VP = 5{,}000 - 200 = 4{,}800$

3.4 Conversión de tasas de interés

Concepto:
Las tasas de interés pueden expresarse en distintos períodos. Es necesario convertirlas para compararlas o aplicarlas correctamente.

Fórmulas:

1. **Tasa equivalente simple:**
   $i1 \times t1 = i2 \times t2$
2. **Tasa equivalente compuesta:**
   $(1 + i1)^{t1} = (1 + i2)^{t2}$

Ejemplos de ejercicios con solución:

Ejercicio 7:
Convertir una tasa del 12% anual simple a tasa semestral equivalente.

Solución:
$i1 \times t1 = i2 \times t2 \rightarrow 0.12 \times 1 = i2 \times 0.5 \rightarrow i2 = 0.24 \rightarrow$ 6% semestral

Ejercicio 8:
Convertir una tasa del 12% anual compuesta a tasa semestral equivalente.

Solución:
$(1 + i1)^{t1} = (1 + i2)^{t2} \rightarrow (1 + 0.12)^1 = (1 + i2)^2$
$1.12 = (1 + i2)^2$
$1 + i2 = \sqrt{1.12} = 1.0583$
$i2 = 0.0583 \rightarrow$ 5.83% semestral

Ejercicios finales integradores

Ejercicio 9:
Calcular el monto de un capital de 8,000 al 10% anual compuesto durante 2 años y luego descontar anticipadamente 6 meses con un descuento comercial del 6% anual.

Solución:
Paso 1: Monto compuesto: M = 8,000 × (1 + 0.10)^2 = 8,000 × 1.21 = 9,680
Paso 2: Descuento comercial: DC = 9,680 × 0.06 × 0.5 = 290.4
Valor presente: VP = 9,680 - 290.4 = 9,389.6

Ejercicio 10:
Un capital de 15,000 genera un interés simple de 1,800 en 1.5 años. Calcular la tasa anual y el monto final.

Solución:
i = I / (C × t) = 1,800 / (15,000 × 1.5) = 0.08 → 8% anual
Monto final: M = 15,000 + 1,800 = 16,800

Esta lección cubre todas las operaciones básicas necesarias para comenzar a trabajar con matemáticas financieras de forma práctica. Incluye teoría, fórmulas y ejercicios resueltos paso a paso.

Parte II: Interés Simple y Compuesto

4. Interés Simple

Objetivo de la lección:
Comprender el concepto de interés simple, aprender sus fórmulas, aplicaciones prácticas y resolver problemas relacionados con préstamos, depósitos y otras operaciones financieras básicas.

4.1 Fórmulas y aplicaciones

Concepto:
El interés simple es la ganancia o costo de un capital que se calcula únicamente sobre el capital inicial durante cada período, sin acumular intereses previos. Es el método más básico y directo de cálculo de intereses.

Fórmulas principales:

1. **Interés (I):**
   $I = C \times i \times t$
   Donde:

- I = interés generado
- C = capital inicial
- i = tasa de interés por período (en forma decimal)
- t = tiempo (en períodos que corresponda con la tasa)

2. **Monto (M):**
   $M = C + I$
   $M = C + (C \times i \times t)$
   $M = C \times (1 + i \times t)$
3. **Capital (C):**
   $C = I / (i \times t)$
4. **Tasa de interés (i):**
   $i = I / (C \times t)$
5. **Tiempo (t):**
   $t = I / (C \times i)$

Aplicaciones:

- Préstamos de dinero a corto plazo
- Depósitos bancarios con interés fijo
- Pagos diferidos
- Cálculo de rentabilidad de inversiones simples

4.2 Problemas prácticos de interés simple

Ejercicio 1:
Un capital de 7,000 se invierte al 9% anual. Calcular el interés generado en 3 años.

Solución:
$I = C \times i \times t = 7{,}000 \times 0.09 \times 3 = 1{,}890$

Ejercicio 2:
Un capital de 5,000 genera un interés de 600 en 2 años. Calcular la tasa anual de interés.

Solución:
$i = I / (C \times t) = 600 / (5{,}000 \times 2) = 0.06 \rightarrow 6\%$ anual

Ejercicio 3:
Calcular el monto final de un capital de 4,500 al 8% anual durante 5 años.

Solución:
$M = C \times (1 + i \times t) = 4{,}500 \times (1 + 0.08 \times 5) = 4{,}500 \times 1.4 = 6{,}300$

Ejercicio 4:
Se desea recibir un interés de 900 en 3 años con una tasa de 10% anual. Calcular el capital necesario.

Solución:
$C = I / (i \times t) = 900 / (0.10 \times 3) = 900 / 0.3 = 3{,}000$

Ejercicio 5:
Un capital de 6,000 se invierte al 12% anual. ¿Cuánto tiempo se necesita para generar 1,440 de interés?

Solución:
$t = I / (C \times i) = 1{,}440 / (6{,}000 \times 0.12) = 1{,}440 / 720 = 2$ años

---

4.3 Aplicaciones en préstamos y depósitos

Ejercicio 6 (Préstamo):
Una persona pide prestado 10,000 a un banco al 7% anual de interés simple. ¿Cuánto deberá pagar al cabo de 4 años?

Solución:
$I = C \times i \times t = 10{,}000 \times 0.07 \times 4 = 2{,}800$
$\text{Monto} = C + I = 10{,}000 + 2{,}800 = 12{,}800$

Ejercicio 7 (Depósito):
Se deposita 8,000 en un banco a interés simple del 6% anual durante 2.5 años. Calcular el monto final.

Solución:
$I = 8{,}000 \times 0.06 \times 2.5 = 1{,}200$
$M = 8{,}000 + 1{,}200 = 9{,}200$

Ejercicio 8 (Comparación de depósitos):
Se ofrecen dos depósitos:

- Depósito A: 5,000 al 7% anual por 3 años
- Depósito B: 5,000 al 6% anual por 4 años
  Calcular el interés y el monto final de cada depósito y decidir cuál es más rentable.

Solución:
Depósito A: $I = 5{,}000 \times 0.07 \times 3 = 1{,}050 \rightarrow M = 5{,}000 + 1{,}050 = 6{,}050$
Depósito B: $I = 5{,}000 \times 0.06 \times 4 = 1{,}200 \rightarrow M = 5{,}000 + 1{,}200 = 6{,}200$
Más rentable: Depósito B

Ejercicio 9 (Préstamo con tiempo fraccionario):
Se presta 12,000 al 9% anual por 18 meses. Calcular el interés.

Solución:
$t = 18$ meses $= 1.5$ años
$I = 12{,}000 \times 0.09 \times 1.5 = 1{,}620$

Ejercicio 10 (Capital desconocido):
Una persona desea ganar 2,400 de interés en 3 años invirtiendo a una tasa del 8% anual simple. Calcular el capital necesario.

Solución:
$C = I / (i \times t) = 2{,}400 / (0.08 \times 3) = 2{,}400 / 0.24 = 10{,}000$

Resumen práctico:

- El interés simple se calcula únicamente sobre el capital inicial.
- Es útil para préstamos y depósitos de corto o mediano plazo.
- Se puede resolver cualquier incógnita (capital, interés, tasa o tiempo) usando la misma fórmula.
- Permite comparar diferentes alternativas de inversión o financiamiento de manera directa.

---

5. Interés Compuesto

Objetivo de la lección:

Comprender el concepto de interés compuesto, su diferencia con el interés simple, aprender las fórmulas de valor futuro y presente, manejar la capitalización periódica y aplicar tablas financieras en la resolución de problemas prácticos.

5.1 Concepto y diferencia con el interés simple

Concepto:
El interés compuesto es aquel en el que los intereses generados se suman al capital inicial para producir nuevos intereses en los períodos siguientes. Es decir, los intereses se capitalizan, generando un efecto de "interés sobre interés".

Diferencia con el interés simple:

- Interés simple: los intereses se calculan solo sobre el capital inicial.
- Interés compuesto: los intereses se calculan sobre el capital inicial más los intereses acumulados hasta el momento.

Ejemplo conceptual:
Si se invierten 1,000 a 10% anual:

- Interés simple 2 años: 1,000 × 0.10 × 2 = 200 → Monto = 1,200
- Interés compuesto 2 años: Año 1 → 1,000 × 0.10 = 100 → Monto 1,100
  Año 2 → 1,100 × 0.10 = 110 → Monto 1,210

5.2 Fórmulas de valor futuro y valor presente

1. **Valor futuro (VF o M):**
   VF = C × (1 + i)^t
   Donde:

- VF = valor futuro o monto
- C = capital inicial
- i = tasa de interés por período
- t = número de períodos

2. **Valor presente (VP o C):**
   VP = VF / (1 + i)^t
3. **Interés generado (I):**
   I = VF - C = C × [(1 + i)^t - 1]

5.3 Capitalización periódica

La capitalización puede ser anual, semestral, trimestral o mensual. Para períodos menores a un año, se ajusta la fórmula:

Fórmula general para capitalización periódica:
VF = C × (1 + i/n)^(n × t)
Donde:

- n = número de capitalizaciones por año
- i/n = tasa por período
- n × t = número total de períodos

Ejemplos de capitalización:

- Anual: n = 1
- Semestral: n = 2
- Trimestral: n = 4
- Mensual: n = 12

5.4 Ejemplos y problemas prácticos

Ejercicio 1:
Calcular el monto de 5,000 invertidos a 8% anual compuesto durante 3 años.

Solución:
VF = 5,000 × (1 + 0.08)^3 = 5,000 × 1.259712 = 6,298.56

Ejercicio 2:
Un capital de 4,000 se invierte al 6% anual compuesto durante 5 años. Calcular el interés generado.

Solución:
VF = 4,000 × (1 + 0.06)^5 = 4,000 × 1.338226 = 5,352.90
I = VF - C = 5,352.90 - 4,000 = 1,352.90

Ejercicio 3 (Capitalización semestral):
Se invierten 3,000 al 10% anual compuesto, capitalización semestral, durante 2 años.

Solución:
i/n = 0.10 / 2 = 0.05
n × t = 2 × 2 = 4 períodos
VF = 3,000 × (1 + 0.05)^4 = 3,000 × 1.21550625 = 3,646.52

Ejercicio 4 (Capitalización trimestral):
Invertir 8,000 al 12% anual compuesto, capitalización trimestral, por 1 año.

Solución:
i/n = 0.12 / 4 = 0.03
n × t = 4 × 1 = 4
VF = 8,000 × (1 + 0.03)^4 = 8,000 × 1.12550881 = 9,004.07

Ejercicio 5 (Valor presente):
Se desea tener 10,000 dentro de 3 años a 7% anual compuesto. ¿Cuál capital se debe invertir hoy?

Solución:
VP = 10,000 / (1 + 0.07)^3 = 10,000 / 1.225043 = 8,163.26

Ejercicio 6 (Comparación con interés simple):
Se invierten 5,000 al 6% anual por 4 años. Comparar monto final interés simple vs compuesto.

Solución:
Interés simple: M = 5,000 × (1 + 0.06 × 4) = 5,000 × 1.24 = 6,200
Interés compuesto: VF = 5,000 × (1 + 0.06)^4 = 5,000 × 1.262476 = 6,312.38

Ejercicio 7 (Capitalización mensual):
Se invierten 7,500 al 9% anual compuesto, capitalización mensual, por 2 años.

Solución:
i/n = 0.09 / 12 = 0.0075
n × t = 12 × 2 = 24
VF = 7,500 × (1 + 0.0075)^24 ≈ 7,500 × 1.196 = 8,970

Ejercicio 8 (Tiempo desconocido):
Se invierten 6,000 a 8% anual compuesto para alcanzar 8,640. Calcular el tiempo.

Solución:
VF = C × (1 + i)^t → 8,640 = 6,000 × (1 + 0.08)^t
(1 + 0.08)^t = 8,640 / 6,000 = 1.44
t = log(1.44) / log(1.08) ≈ 4.5 años

Ejercicio 9 (Tasa desconocida):
Se invierten 10,000 a interés compuesto durante 3 años y se obtiene 12,000. Calcular la tasa anual.

Solución:
VF = C × (1 + i)^t → 12,000 = 10,000 × (1 + i)^3
(1 + i)^3 = 1.2 → 1 + i = (1.2)^(1/3) ≈ 1.0627
i ≈ 0.0627 → 6.27% anual

Ejercicio 10 (Uso de tablas financieras):
Se desea calcular el monto de 2,500 a 10% anual compuesto durante 5 años usando la tabla de factor compuesto (1 + i)^t = 1.61051.

Solución:
VF = C × (1 + i)^t = 2,500 × 1.61051 ≈ 4,026.28

5.5 Uso de tablas financieras

Las tablas financieras permiten:

- Evitar cálculos de potencias para interés compuesto
- Consultar factores de capitalización (1 + i)^t
- Consultar factores de descuento (1 / (1 + i)^t)

Ejemplo práctico:
Si en la tabla, para 10% anual y 3 años, el factor compuesto es 1.331 → VF = C × 1.331

Ventajas:

- Rapidez en cálculos manuales
- Facilita el análisis de varias alternativas de inversión

Resumen práctico:

- El interés compuesto permite que los intereses generen más intereses.
- El valor futuro y presente son fundamentales para planificar inversiones y préstamos.
- La capitalización periódica ajusta el cálculo a diferentes frecuencias (anual, semestral, trimestral, mensual).
- Las tablas financieras simplifican los cálculos y permiten comparaciones rápidas.

---

6. Tasas de Interés y Equivalencias

6.1 Tasa nominal y tasa efectiva

La **tasa de interés nominal (i_n)** es la tasa que se anuncia o se establece sin tener en cuenta la frecuencia de capitalización de los intereses. Se expresa generalmente en términos anuales.

La **tasa de interés efectiva (i_e)** toma en cuenta la capitalización periódica de los intereses y refleja el interés real que se obtiene o se paga en un año.

Relación entre ambas:
Si la tasa nominal es capitalizable (m) veces al año, la tasa efectiva anual se calcula así:
i_e = (1 + i_n / m)^m - 1

Ejemplo:
Tasa nominal anual: 12%, capitalizable mensualmente (m=12).
i_e = (1 + 0.12 / 12)^12 - 1
i_e = (1 + 0.01)^12 - 1
i_e ≈ 0.1268 o 12.68%

6.2 Conversión de tasas

Para comparar distintas tasas con diferentes períodos de capitalización, se deben convertir a tasas equivalentes.

Fórmulas importantes:

- De tasa nominal a tasa efectiva:
  i_e = (1 + i_n / m)^m - 1
- De tasa efectiva a tasa nominal:
  i_n = m * [(1 + i_e)^(1/m) - 1]
- De tasa efectiva anual a tasa efectiva de un período diferente:
  i_p = (1 + i_e)^(1/m) - 1

Ejemplo:
Tasa efectiva anual: 12.68%, ¿cuál es la tasa mensual equivalente?
i_m = (1 + 0.1268)^(1/12) - 1
i_m ≈ 0.01 o 1% mensual

6.3 Tasa periódica y tasa anual equivalente

La **tasa periódica (i_p)** es la tasa que se aplica en cada período de capitalización.

La **tasa anual equivalente (TAE)** o tasa efectiva anual (i_e) permite comparar préstamos o inversiones con distintos períodos de capitalización.

Relación:
i_e = (1 + i_p)^m - 1
donde m = número de períodos de capitalización al año

Ejemplo:
Tasa mensual: 1%, ¿cuál es la TAE?
i_e = (1 + 0.01)^12 - 1
i_e ≈ 0.1268 o 12.68%

Ejercicios con solución

Ejercicio 1:
Un banco ofrece una tasa nominal anual del 18%, capitalizable trimestralmente. Calcula la tasa efectiva anual.

Solución 1:
i_n = 0.18, m = 4
i_e = (1 + 0.18/4)^4 - 1 = (1 + 0.045)^4 - 1 ≈ 1.045^4 - 1
1.045^4 ≈ 1.1855
i_e ≈ 0.1855 o 18.55%

Ejercicio 2:
Convierte una tasa efectiva anual del 15% a una tasa nominal anual capitalizable mensualmente.

Solución 2:
i_e = 0.15, m = 12
i_n = 12 * [(1 + 0.15)^(1/12) - 1]
(1 + 0.15)^(1/12) ≈ 1.01176
i_n ≈ 12 * 0.01176 ≈ 0.1411 o 14.11%

Ejercicio 3:
Si una inversión ofrece una tasa mensual del 2%, calcula la tasa efectiva anual.

Solución 3:
i_p = 0.02, m = 12
i_e = (1 + 0.02)^12 - 1
(1.02)^12 ≈ 1.2682
i_e ≈ 0.2682 o 26.82%

Ejercicio 4:
Convierte una tasa nominal anual del 24% capitalizable semestralmente en tasa efectiva anual.

Solución 4:
i_n = 0.24, m = 2
i_e = (1 + 0.24/2)^2 - 1 = (1 + 0.12)^2 - 1 = 1.12^2 - 1 = 1.2544 - 1
i_e ≈ 0.2544 o 25.44%

Ejercicio 5:
Una tasa efectiva anual es del 20%. Determina la tasa mensual equivalente.

Solución 5:
i_e = 0.20, m = 12
i_m = (1 + 0.20)^(1/12) - 1
(1.20)^(1/12) ≈ 1.01527
i_m ≈ 0.01527 o 1.527% mensual

Ejercicio 6:
Comparar dos préstamos:

- Préstamo A: 18% nominal anual capitalizable trimestralmente
- Préstamo B: 17.5% efectiva anual
  ¿Cuál es más barato?

Solución 6:
Préstamo A: i_n = 0.18, m=4
i_e = (1 + 0.18/4)^4 - 1 = (1.045)^4 - 1 ≈ 0.1855 o 18.55%
Préstamo B: i_e = 17.5%
Conclusión: Préstamo B es más barato.

Ejercicio 7:
Una inversión ofrece 0.5% mensual. Calcula la tasa nominal anual capitalizable trimestralmente.

Solución 7:
i_p = 0.005, m_trimestral = 4
Tasa efectiva anual: i_e = (1 + 0.005)^12 - 1 ≈ 1.005^12 - 1 ≈ 0.0617 o 6.17%
Convertimos a nominal trimestral: i_n = 4 * [(1 + 0.0617)^(1/4) - 1]
(1.0617)^(1/4) ≈ 1.0151
i_n ≈ 4 * 0.0151 ≈ 0.0604 o 6.04%

Ejercicio 8:
Determina la tasa anual equivalente de un préstamo con tasa efectiva trimestral del 3%.

Solución 8:
i_trimestral = 0.03, m=4
i_e = (1 + 0.03)^4 - 1 = 1.03^4 - 1 ≈ 1.1255 - 1
i_e ≈ 0.1255 o 12.55%

Esta lección incluye los conceptos fundamentales de tasas de interés, la conversión entre nominal y efectiva, tasas periódicas, y ejercicios resueltos que permiten practicar todas las fórmulas clave.

Parte III: Rentas y Anualidades

7. Rentas Financieras

7.1 Definición y clasificación

Una **renta financiera** es una serie de pagos o cobros iguales, periódicos y sucesivos durante un tiempo determinado. Se utiliza para planificar inversiones, préstamos, pensiones, hipotecas, entre otros.

Clasificación:

7.1.1 Renta ordinaria
Los pagos se realizan al final de cada período. Es la forma más común en préstamos e inversiones.

7.1.2 Renta vencida
Es equivalente a la renta ordinaria; los pagos se efectúan al final del período. Se usa indistintamente con renta ordinaria.

7.1.3 Renta anticipada
Los pagos se realizan al inicio de cada período. Esto genera un mayor valor presente o futuro debido a que cada pago se capitaliza un período más.

7.2 Valor presente de una renta

El **valor presente (VP)** de una renta es la suma de todos los pagos futuros descontados al valor actual, usando una tasa de interés determinada.

Renta ordinaria:
VP = R * [1 - (1 + i)^-n] / i

Renta anticipada:
VP = R * [1 - (1 + i)^-n] / i * (1 + i)

Donde:

- R = pago periódico
- i = tasa de interés por período
- n = número de períodos

7.3 Valor futuro de una renta

El **valor futuro (VF)** es la suma de todos los pagos acumulados con interés hasta el final del período.

Renta ordinaria:
VF = R * [(1 + i)^n - 1] / i

Renta anticipada:
VF = R * [(1 + i)^n - 1] / i * (1 + i)

7.4 Aplicaciones prácticas

- Planificación de ahorros: calcular cuánto se acumulará si se deposita una cantidad periódica.
- Préstamos: determinar cuánto se debe pagar si los pagos son periódicos.
- Pensiones y rentas vitalicias: calcular el valor actual de los pagos futuros.

Ejercicios con solución

Ejercicio 1:
Calcular el valor presente de una renta ordinaria de 500 dólares mensuales durante 5 años, con una tasa de interés del 1% mensual.

Solución 1:
R = 500, i = 0.01, n = 5*12 = 60
VP = 500 * [1 - (1 + 0.01)^-60] / 0.01
(1 + 0.01)^-60 ≈ 0.5488
VP = 500 * (1 - 0.5488) / 0.01 = 500 * 0.4512 / 0.01 ≈ 500 * 45.12 ≈ 22,560 dólares

---

Ejercicio 2:
Calcular el valor futuro de la misma renta ordinaria anterior.

Solución 2:
VF = 500 * [(1 + 0.01)^60 - 1] / 0.01
(1.01)^60 ≈ 1.816
VF = 500 * (1.816 - 1) / 0.01 = 500 * 0.816 / 0.01 = 500 * 81.6 ≈ 40,800 dólares

---

Ejercicio 3:
Una persona recibe 300 dólares al inicio de cada mes durante 2 años. La tasa de interés mensual es del 0.5%. Calcular el valor presente.

Solución 3:
Renta anticipada: R = 300, i = 0.005, n = 2*12 = 24
VP = 300 * [1 - (1 + 0.005)^-24] / 0.005 * (1 + 0.005)
(1 + 0.005)^-24 ≈ 0.8864
VP = 300 * (1 - 0.8864) / 0.005 * 1.005 = 300 * 0.1136 / 0.005 * 1.005
300 * 22.72 * 1.005 ≈ 300 * 22.8336 ≈ 6,850 dólares

Ejercicio 4:
Calcular el valor futuro de la renta anticipada anterior.

Solución 4:
VF = 300 * [(1 + 0.005)^24 - 1] / 0.005 * (1 + 0.005)
(1.005)^24 ≈ 1.127
VF = 300 * (1.127 - 1) / 0.005 * 1.005 = 300 * 0.127 / 0.005 * 1.005
300 * 25.4 * 1.005 ≈ 300 * 25.527 ≈ 7,658 dólares

Ejercicio 5:
Una renta ordinaria paga 2000 dólares cada trimestre durante 3 años, con tasa trimestral del 2%. Calcular el valor presente.

Solución 5:
R = 2000, i = 0.02, n = 3*4 = 12
VP = 2000 * [1 - (1 + 0.02)^-12] / 0.02
(1.02)^-12 ≈ 0.787
VP = 2000 * (1 - 0.787) / 0.02 = 2000 * 0.213 / 0.02 = 2000 * 10.65 ≈ 21,300 dólares

---

Ejercicio 6:
Calcular el valor futuro de la renta ordinaria anterior.

Solución 6:
VF = 2000 * [(1 + 0.02)^12 - 1] / 0.02
(1.02)^12 ≈ 1.2682
VF = 2000 * (1.2682 - 1) / 0.02 = 2000 * 0.2682 / 0.02 = 2000 * 13.41 ≈ 26,820 dólares

---

Ejercicio 7:
Una inversión permite depósitos mensuales de 150 dólares al inicio de cada mes durante 10 meses. La tasa mensual es 1%. Calcular el valor futuro.

Solución 7:
Renta anticipada: R = 150, i = 0.01, n = 10
VF = 150 * [(1.01)^10 - 1] / 0.01 * (1.01)
(1.01)^10 ≈ 1.1046
VF = 150 * (1.1046 - 1) / 0.01 * 1.01 = 150 * 0.1046 / 0.01 * 1.01
150 * 10.46 * 1.01 ≈ 150 * 10.565 ≈ 1,584.75 dólares

Ejercicio 8:
Una renta vencida paga 400 dólares mensuales durante 18 meses con tasa 0.8% mensual. Calcular el valor presente.

Solución 8:
Renta ordinaria: R = 400, i = 0.008, n = 18
VP = 400 * [1 - (1.008)^-18] / 0.008
(1.008)^-18 ≈ 0.867
VP = 400 * (1 - 0.867) / 0.008 = 400 * 0.133 / 0.008 = 400 * 16.625 ≈ 6,650 dólares

Esta lección detalla los conceptos fundamentales de rentas financieras, diferencias entre ordinarias y anticipadas, cálculo de valor presente y futuro, y aplicaciones prácticas con ejercicios resueltos.

8. Anualidades

8.1 Concepto y tipos de anualidades

Una **anualidad** es una serie de pagos o ingresos iguales realizados a intervalos regulares durante un periodo de tiempo determinado. Las anualidades son utilizadas frecuentemente en préstamos, inversiones, pensiones y seguros.

Tipos de anualidades:

1. **Anualidad ordinaria (vencida):** Los pagos se realizan al final de cada período. Ejemplo: pago de una hipoteca mensual al final de cada mes.
2. **Anualidad anticipada (pagos adelantados):** Los pagos se realizan al inicio de cada período. Ejemplo: alquiler mensual pagado al inicio del mes.
3. **Anualidad perpetua:** Pagos iguales que se realizan indefinidamente. Ejemplo: dividendos constantes de una acción que no dejan de pagarse.
4. **Anualidad diferida:** Los pagos comienzan después de un cierto período de tiempo. Ejemplo: pensión que empieza 5 años después de la jubilación.

8.2 Cálculo de anualidades ordinarias y anticipadas

8.2.1 Anualidad ordinaria

- **Valor presente (VP):** Es el valor actual de todos los pagos futuros descontados a una tasa de interés i.
  Fórmula:
  VP = R × [(1 - (1 + i)^-n) / i]
  Donde:
  R = pago periódico
  i = tasa de interés por periodo
  n = número de períodos
- **Valor futuro (VF):** Es el valor que tendrán todos los pagos al final del período n, capitalizados a la tasa de interés i.
  Fórmula:
  VF = R × [((1 + i)^n - 1) / i]

Ejemplo:
Pago anual R = 1000, tasa i = 5% anual, n = 4 años.
VP = 1000 × [(1 - (1 + 0.05)^-4)/0.05] = 1000 × [(1 - 0.8227)/0.05] = 1000 × 3.545 = 3545
VF = 1000 × [((1 + 0.05)^4 - 1)/0.05] = 1000 × [(1.2155 - 1)/0.05] = 1000 × 4.31 = 4310

8.2.2 Anualidad anticipada

- Los pagos se realizan al inicio de cada período.
- **Valor presente:**
  VP = R × [(1 - (1 + i)^-n) / i] × (1 + i)
- **Valor futuro:**
  VF = R × [((1 + i)^n - 1) / i] × (1 + i)

Ejemplo:
R = 1000, i = 5%, n = 4 años.
VP = 3545 × 1.05 = 3722.25
VF = 4310 × 1.05 = 4525.50

8.3 Anualidades perpetuas y diferidas

8.3.1 Anualidad perpetua

- Pagos iguales realizados indefinidamente.
- **Valor presente:**
  VP = R / i

Ejemplo:
Pago anual R = 1000, i = 5%
VP = 1000 / 0.05 = 20000

8.3.2 Anualidad diferida

- Pagos comienzan después de t períodos.
- **Valor presente:**
  VP = VP de la anualidad ordinaria × (1 + i)^-t

Ejemplo:
Anualidad ordinaria de 1000 al año, n = 5 años, i = 5%, empieza después de 3 años.
VP ordinaria = 1000 × [(1 - (1 + 0.05)^-5)/0.05] = 1000 × 4.329 = 4329
VP diferida = 4329 × (1 + 0.05)^-3 = 4329 × 0.8638 = 3737

8.4 Problemas y casos prácticos

Ejercicio 1:
Un individuo deposita $500 al final de cada año en un fondo que rinde 6% anual durante 10 años.
a) Valor presente de la anualidad
b) Valor futuro de la anualidad

Solución 1:
VP = 500 × [(1 - (1 + 0.06)^-10)/0.06] = 500 × [(1 - 0.55839)/0.06] = 500 × 7.36 = 3680
VF = 500 × [((1 + 0.06)^10 - 1)/0.06] = 500 × [(1.79085 - 1)/0.06] = 500 × 13.18 = 6590

Ejercicio 2:
Se desea recibir $2000 al inicio de cada año durante 5 años. La tasa de interés es 8%.
Calcular el valor presente.

Solución 2:
VP anualidad ordinaria = 2000 × [(1 - (1 + 0.08)^-5)/0.08] = 2000 × 3.993 = 7986
VP anualidad anticipada = 7986 × 1.08 = 8625.90

Ejercicio 3:
Un bono paga $100 al final de cada año indefinidamente con una tasa de descuento de 4%. Calcular su valor presente.

Solución 3:
VP perpetua = 100 / 0.04 = 2500

Ejercicio 4:
Se promete pagar $1500 al final de cada año durante 6 años, comenzando 3 años después de hoy. La tasa de interés es 5%.
Calcular el valor presente hoy.

Solución 4:
VP anualidad ordinaria = 1500 × [(1 - (1 + 0.05)^-6)/0.05] = 1500 × 5.0757 = 7613.55
VP diferida = 7613.55 × (1 + 0.05)^-3 = 7613.55 × 0.8638 = 6573.60

Ejercicio 5:
Se desea saber cuánto habrá acumulado un plan que paga $800 al inicio de cada año durante 7 años con una tasa de 7%.

Solución 5:
VF anualidad ordinaria = 800 × [((1 + 0.07)^7 - 1)/0.07] = 800 × [1.60578 / 0.07] = 800 × 22.94 = 18352
VF anualidad anticipada = 18352 × 1.07 = 19632.64

---

9. Amortización de Deudas

9.1 Sistemas de amortización

La amortización de deudas consiste en el pago programado de un préstamo mediante pagos periódicos que cubren intereses y capital. Existen distintos **sistemas de amortización**, cada uno con características específicas en la distribución de capital e intereses.

9.1.1 Sistema francés (cuotas constantes)

- También llamado sistema de **cuotas fijas**.
- Cada pago periódico es constante durante todo el plazo del préstamo.
- La **parte de interés disminuye** con el tiempo y la **parte de capital aumenta** progresivamente.
- Fórmula de la cuota:
  $C = P \times [i \times (1 + i)^n] / [(1 + i)^n - 1]$
  Donde:
  C = cuota periódica
  P = capital prestado
  i = tasa de interés por período
  n = número de períodos

9.1.2 Sistema alemán (cuotas decrecientes)

- La amortización del capital es constante en cada período.
- Los intereses se calculan sobre el saldo de capital pendiente, por lo que la **cuota total disminuye** con el tiempo.
- Fórmulas:
  Amortización = P / n
  Interés = Saldo pendiente × i
  Cuota = Amortización + Interés

9.1.3 Sistema americano (cuota de intereses y capital final)

- Durante la vida del préstamo, se pagan solo intereses periódicamente.
- El capital se paga en un **único pago al final** del préstamo.
- Fórmulas:
  Interés periódico = P × i
  Cuota periódica = Interés periódico
  Pago final = Interés + capital

9.2 Cuadro de amortización

Un **cuadro de amortización** muestra la evolución de un préstamo a lo largo de los períodos, indicando:

- Saldo inicial
- Cuota
- Intereses
- Amortización de capital
- Saldo final

Ejemplo de cuadro sistema francés:

Período	Saldo inicial	Cuota	Interés	Amortización	Saldo final
1	10000	2300	500	1800	8200
2	8200	2300	410	1890	6310
...	...	...	...	...	...

9.3 Intereses y capital en cada período

- **Interés**: calculado sobre el saldo pendiente al inicio de cada período.
- **Amortización de capital**: diferencia entre la cuota y los intereses (sistema francés) o cantidad constante de capital (sistema alemán).
- **Saldo pendiente**: saldo inicial menos amortización de capital acumulada.

9.4 Ejercicios prácticos

Ejercicio 1 (Sistema francés):
Préstamo: $10,000, tasa 5% anual, plazo 4 años, cuotas anuales constantes.
a) Calcular la cuota anual
b) Elaborar cuadro de amortización

Solución 1:
C = 10000 × [0.05 × (1.05)^4] / [(1.05)^4 - 1] = 10000 × 0.050 × 1.2155 / 0.2155 = 10000 × 0.282 = 2820
Cuadro de amortización:

Año	Saldo inicial	Cuota	Interés	Amortización	Saldo final
1	10000	2820	500	2320	7680
2	7680	2820	384	2436	5244
3	5244	2820	262	2558	2686
4	2686	2820	134	2686	0

Ejercicio 2 (Sistema alemán):
Préstamo: $12,000, tasa 6%, plazo 3 años, amortización de capital constante.
a) Calcular cuotas anuales
b) Elaborar cuadro

Solución 2:
Amortización = 12000 / 3 = 4000
Cuotas:

- Año 1: Interés = 12000 × 0.06 = 720, Cuota = 4720, Saldo final = 8000
- Año 2: Interés = 8000 × 0.06 = 480, Cuota = 4480, Saldo final = 4000
- Año 3: Interés = 4000 × 0.06 = 240, Cuota = 4240, Saldo final = 0

Año	Saldo inicial	Cuota	Interés	Amortización	Saldo final
1	12000	4720	720	4000	8000
2	8000	4480	480	4000	4000
3	4000	4240	240	4000	0

Ejercicio 3 (Sistema americano):
Préstamo: $5,000, tasa 7%, plazo 5 años, intereses pagados anualmente, capital al final.
a) Calcular pagos anuales

Solución 3:
Pago anual de intereses = 5000 × 0.07 = 350
Pago final (año 5) = 350 + 5000 = 5350

Año	Cuota	Interés	Amortización	Saldo final
1	350	350	0	5000
2	350	350	0	5000
3	350	350	0	5000
4	350	350	0	5000
5	5350	350	5000	0

Ejercicio 4 (Comparación sistemas francés y alemán):
Préstamo: $20,000, tasa 8%, plazo 4 años.
a) Cuotas sistema francés
b) Cuotas sistema alemán

Solución 4:
Sistema francés: C = 20,000 × [0.08 × (1.08)^4] / [(1.08)^4 - 1] = 20,000 × 0.08 × 1.3605 / 0.3605 ≈ 6018
Sistema alemán: Amortización = 20,000 / 4 = 5000
Cuotas:

- Año 1: Interés 1600, Cuota = 6600
- Año 2: Interés 1200, Cuota = 6200
- Año 3: Interés 800, Cuota = 5800
- Año 4: Interés 400, Cuota = 5400

Ejercicio 5 (Elaboración de cuadro completo sistema francés):
Préstamo: $15,000, tasa 6%, plazo 3 años, cuotas anuales.

Solución 5:
C = 15,000 × [0.06 × (1.06)^3] / [(1.06)^3 - 1] = 15,000 × 0.06 × 1.191016 / 0.191016 ≈ 5615
Cuadro:

Año	Saldo inicial	Cuota	Interés	Amortización	Saldo final
1	15000	5615	900	4715	10285
2	10285	5615	617	4998	5297
3	5297	5615	318	5297	0

Parte IV: Descuento Financiero

10. Descuento Simple

El **descuento simple** es una operación financiera mediante la cual se calcula el valor presente de un documento o deuda que se pagará en el futuro, descontando los intereses por adelantado. Es utilizado comúnmente en letras de cambio, pagarés y otros instrumentos de crédito a corto plazo.

Fórmula general del descuento simple:
$D = F * i * t$
$V = F - D$

Donde:
D = descuento
F = valor futuro o nominal del documento
V = valor presente (lo que se recibe hoy)
i = tasa de interés por período
t = tiempo expresado en años o fracciones de año

10.1 Descuento Comercial (o bancario)

En el **descuento comercial**, también llamado **descuento por fuera**, el interés se calcula sobre el valor nominal del documento. Es el método más común usado por bancos.

Fórmula del descuento comercial:
$D_c = F * i * t$
$V = F - D_c$

Ejemplo:
Un pagaré de 10.000 € vence en 6 meses. La tasa de descuento comercial anual es del 12%.
$D_c = 10.000 * 0.12 * 0.5 = 600$ €
$V = 10.000 - 600 = 9.400$ €

Interpretación:
El tenedor del pagaré recibirá 9.400 € hoy si decide descontarlo en el banco, pagando 600 € como interés adelantado.

10.2 Descuento Racional (o matemático)

En el **descuento racional**, también llamado **descuento por dentro**, los intereses se calculan sobre el valor actual del documento (valor presente), no sobre el nominal. Este método es más exacto matemáticamente y suele considerarse más justo.

Fórmula del descuento racional:
$D_r = F * i * t / (1 + i * t)$
$V = F - D_r$

Ejemplo:
Usando el mismo pagaré de 10.000 € a 6 meses con tasa anual del 12%:
$D_r = 10.000 * 0.12 * 0.5 / (1 + 0.12 * 0.5) = 10.000 * 0.06 / 1.06 \approx 566,04$ €
$V = 10.000 - 566,04 \approx 9.433,96$ €

Interpretación:
El valor presente es ligeramente mayor que con el descuento comercial porque los intereses se calculan sobre el valor presente y no sobre el nominal.

10.3 Fórmulas y ejemplos resumidos

1. **Descuento Comercial:**
   $D_c = F * i * t$
   $V = F - D_c$
2. **Descuento Racional:**
   $D_r = F * i * t / (1 + i * t)$
   $V = F - D_r$

Comparación:
El descuento racional siempre produce un valor presente mayor que el comercial para el mismo documento, tasa y tiempo.

10.4 Aplicaciones en letras de cambio y pagarés

- Se utiliza para **anticipar dinero** antes de la fecha de vencimiento del documento.
- Permite a bancos y empresas calcular cuánto recibirán si venden el documento antes de su vencimiento.
- La elección entre descuento comercial y racional depende de políticas internas, acuerdos con clientes y la precisión deseada en el cálculo de intereses.

Ejemplo práctico con letra de cambio:
Una letra de cambio vence en 90 días por 5.000 €. El banco ofrece un descuento comercial al 10% anual.
t = 90/360 = 0,25 años
D_c = 5.000 * 0.10 * 0.25 = 125 €
V = 5.000 - 125 = 4.875 €

Si el banco aplicara descuento racional:
D_r = 5.000 * 0.10 * 0.25 / (1 + 0.10 * 0.25) = 125 / 1.025 ≈ 121,95 €
V ≈ 4.878,05 €

Ejercicios prácticos con solución

Ejercicio 1:
Un pagaré de 8.000 € vence en 4 meses. La tasa de descuento comercial anual es 15%. Calcula:
a) El descuento comercial
b) El valor presente

Solución:
t = 4/12 = 0,3333
D_c = 8.000 * 0.15 * 0.3333 ≈ 400 €
V = 8.000 - 400 = 7.600 €

Ejercicio 2:
Un pagaré de 12.000 € vence en 180 días. La tasa de descuento racional anual es 18%. Calcula el valor presente.

Solución:
t = 180/360 = 0,5
D_r = 12.000 * 0.18 * 0.5 / (1 + 0.18 * 0.5) = 1.080 / 1.09 ≈ 990,83 €
V = 12.000 - 990,83 ≈ 11.009,17 €

Ejercicio 3:
Un documento de 6.000 € vence en 120 días. Calcula:
a) Descuento comercial al 12% anual
b) Descuento racional al 12% anual

Solución:
t = 120/360 = 0,3333
a) $D_c = 6.000 * 0.12 * 0.3333 \approx 240$ €
V = 6.000 - 240 = 5.760 €
b) $D_r = 6.000 * 0.12 * 0.3333 / (1 + 0.12 * 0.3333) = 240 / 1.04 \approx 230,77$ €
V = 6.000 - 230,77 ≈ 5.769,23 €

Ejercicio 4:
Una letra de cambio vence en 60 días por 2.500 €. Calcula el valor presente usando:
a) Descuento comercial al 20% anual
b) Descuento racional al 20% anual

Solución:
t = 60/360 = 0,1667
a) $D_c = 2.500 * 0.20 * 0.1667 \approx 83,33$ €
V = 2.500 - 83,33 ≈ 2.416,67 €
b) $D_r = 2.500 * 0.20 * 0.1667 / (1 + 0.20 * 0.1667) = 83,33 / 1,0333 \approx 80,64$ €
V ≈ 2.419,36 €

Ejercicio 5:
Un pagaré de 15.000 € vence en 270 días. Calcula:
a) Descuento comercial al 10% anual
b) Descuento racional al 10% anual

Solución:
t = 270/360 = 0,75
a) $D_c = 15.000 * 0.10 * 0.75 = 1.125$ €
V = 15.000 - 1.125 = 13.875 €
b) $D_r = 15.000 * 0.10 * 0.75 / (1 + 0.10 * 0.75) = 1.125 / 1.075 \approx 1.046,51$ €
V = 15.000 - 1.046,51 ≈ 13.953,49 €

---

11. Descuento Compuesto

El **descuento compuesto** es una operación financiera donde el valor presente de un documento se calcula descontando los intereses de forma compuesta, es decir, los intereses generados en cada período se suman al capital para el cálculo de los intereses siguientes. Se aplica generalmente en operaciones a mediano y largo plazo y ofrece mayor exactitud matemática que el descuento simple.

La relación fundamental del descuento compuesto es:

$V = F / (1 + i)^n$

Donde:
V = valor presente (lo que se recibe hoy)
F = valor futuro o nominal del documento
i = tasa de interés por período
n = número de períodos

El **descuento compuesto** D_{cmp} se puede calcular como:
$D_{cmp} = F - V = F - F / (1 + i)^n = F * [1 - 1 / (1 + i)^n]$

11.1 Descuento Compuesto Aplicado

En el **descuento compuesto aplicado**, el interés se descuenta considerando la capitalización, es decir, cada período genera intereses sobre el saldo anterior. Se utiliza para calcular anticipos sobre letras, pagarés y otros títulos de crédito en los que se desea un cálculo más preciso.

Ejemplo:
Un pagaré de 10.000 € vence en 2 años. La tasa de descuento compuesto anual es del 12%.
$V = 10.000 / (1 + 0.12)^2 = 10.000 / 1.2544 \approx 7.974,33$ €
$D_{cmp} = 10.000 - 7.974,33 \approx 2.025,67$ €

Interpretación:
El valor presente que se recibe hoy es 7.974,33 € y el descuento aplicado por los dos años es de 2.025,67 €.

11.2 Descuento Compuesto con Capitalización

Cuando los períodos son fraccionarios o se desea calcular el descuento en **capitalización semestral, trimestral o mensual**, la fórmula se adapta:

V = F / (1 + i/m)^(n*m)

Donde:
m = número de capitalizaciones por año
n = número de años

Ejemplo:
Un pagaré de 5.000 € vence en 18 meses. La tasa de descuento compuesto anual es del 12%, con capitalización semestral (m = 2).

Número de períodos: n*m = 1,5 * 2 = 3
i/m = 0,12 / 2 = 0,06
V = 5.000 / (1 + 0.06)^3 = 5.000 / 1.191016 ≈ 4.196,83 €
D_cmp = 5.000 - 4.196,83 ≈ 803,17 €

11.3 Problemas Prácticos

Ejercicio 1:
Un pagaré de 8.000 € vence en 3 años. La tasa de descuento compuesto anual es del 10%. Calcula:
a) Valor presente
b) Descuento aplicado

Solución:
V = 8.000 / (1 + 0.10)^3 = 8.000 / 1.331 ≈ 6.011,26 €
D_cmp = 8.000 - 6.011,26 ≈ 1.988,74 €

Ejercicio 2:
Un documento de 12.000 € vence en 2 años y 6 meses. La tasa anual es 15% con capitalización semestral. Calcula el valor presente y el descuento.

Solución:
n = 2,5 años, m = 2 capitalizaciones por año
n*m = 2,5 * 2 = 5
i/m = 0,15 / 2 = 0,075
V = 12.000 / (1 + 0.075)^5 = 12.000 / 1.43563 ≈ 8.361,79 €
D_cmp = 12.000 - 8.361,79 ≈ 3.638,21 €

Ejercicio 3:
Una letra de cambio vence en 9 meses por 6.000 €. Calcula el valor presente si la tasa de descuento compuesto anual es del 18%, capitalización trimestral.

Solución:
n = 0,75 años, m = 4
n*m = 0,75 * 4 = 3 períodos
i/m = 0,18 / 4 = 0,045
V = 6.000 / (1 + 0.045)^3 = 6.000 / 1.140 ≈ 5.263,16 €
D_cmp = 6.000 - 5.263,16 ≈ 736,84 €

Ejercicio 4:
Un pagaré de 15.000 € vence en 1 año y 9 meses. La tasa de descuento compuesto anual es del 12% con capitalización mensual. Calcula el valor presente y el descuento.

Solución:
n = 1,75 años, m = 12
n*m = 1,75 * 12 = 21 períodos
i/m = 0,12 / 12 = 0,01
V = 15.000 / (1 + 0.01)^21 = 15.000 / 1.23144 ≈ 12.187,47 €
D_cmp = 15.000 - 12.187,47 ≈ 2.812,53 €

Ejercicio 5:
Un documento de 20.000 € vence en 30 meses. La tasa anual de descuento compuesto es del 20% con capitalización trimestral. Calcula valor presente y descuento.

Solución:
n = 2,5 años, m = 4
n*m = 2,5 * 4 = 10 períodos
i/m = 0,20 / 4 = 0,05
V = 20.000 / (1 + 0.05)^10 = 20.000 / 1.6289 ≈ 12.277,14 €
D_cmp = 20.000 - 12.277,14 ≈ 7.722,86 €

---

12. Tasas de Descuento

Las **tasas de descuento** permiten cuantificar la reducción del valor nominal de un documento o inversión por anticipar el cobro o pago de un capital. Se relacionan estrechamente con los intereses, pero expresan la proporción que se descuenta sobre el valor futuro, no sobre el valor presente.

12.1 Descuento Nominal y Efectivo

Descuento nominal (d_n): Es la tasa de descuento aplicada sobre el valor nominal del documento durante un período determinado. Se calcula como:

D = F * d_n * n

Donde:
D = descuento
F = valor nominal del documento
d_n = tasa nominal de descuento por período
n = número de períodos

Descuento efectivo (d_e): Es la tasa que refleja el descuento real respecto al valor presente del documento. Su relación con el descuento nominal es:

d_e = D / V

Donde:
V = valor presente = F - D

Ejemplo:
Un pagaré de 10.000 € vence en 1 año. Se aplica un descuento nominal del 12% anual.
D = 10.000 * 0,12 * 1 = 1.200 €
Valor presente V = 10.000 - 1.200 = 8.800 €
Descuento efectivo d_e = 1.200 / 8.800 ≈ 0,1364 = 13,64%

12.2 Equivalencias de Tasas de Descuento

Las tasas de descuento se pueden **convertir o comparar** con tasas equivalentes para diferentes períodos.

Para convertir una tasa nominal anual a una tasa efectiva anual:

$d_e = d_n / (1 - d_n)$

Ejemplo:
Tasa nominal anual $d_n = 12\%$
Tasa efectiva anual $d_e = 0,12 / (1 - 0,12) = 0,12 / 0,88 \approx 0,13636 = 13,64\%$

Si se desea pasar de tasa efectiva a nominal:

$d_n = d_e / (1 + d_e)$

Ejemplo:
Tasa efectiva $d_e = 13,64\%$
Tasa nominal $d_n = 0,1364 / (1 + 0.1364) \approx 0,12 = 12\%$

12.3 Comparación con Tasas de Interés

La **tasa de interés i** y la **tasa de descuento d** están relacionadas, pero se aplican sobre bases diferentes:

- Interés simple: sobre el capital prestado o invertido (V)
- Descuento: sobre el valor futuro o nominal (F)

Relación entre tasas de interés y descuento:

$i = d / (1 - d)$
$d = i / (1 + i)$

Ejemplo:
Si se tiene un descuento efectivo de 13,64%, la tasa de interés equivalente es:

$i = 0,1364 / (1 - 0,1364) \approx 0,158 = 15,8\%$

Si se tiene una tasa de interés de 15,8%, la tasa de descuento equivalente es:

$d = 0,158 / (1 + 0,158) \approx 0,1364 = 13,64\%$

Esto permite comparar diferentes operaciones financieras usando la misma base.

Parte V: Evaluación de inversión

13. Valor Actual Neto (VAN)

El **Valor Actual Neto (VAN)** es un indicador financiero utilizado para evaluar la rentabilidad de un proyecto o inversión. Permite determinar si el valor presente de los flujos de caja futuros generados por un proyecto supera la inversión inicial.

13.1 Concepto y Fórmula

El VAN se define como la diferencia entre el valor presente de los flujos de caja esperados y la inversión inicial:

VAN = ∑ (Flujos de Caja t / (1 + i)^t) - I0

Donde:
VAN = Valor Actual Neto
Flujos de Caja t = ingreso neto esperado en el período t
i = tasa de descuento o costo de capital
t = número de períodos
I0 = inversión inicial

Interpretación:

- VAN > 0: El proyecto genera valor y es rentable.
- VAN = 0: El proyecto cubre exactamente la inversión y los costos financieros.
- VAN < 0: El proyecto no es rentable; la inversión no se recupera.

13.2 Criterios de decisión de inversión

1. **Regla del VAN:**
    - Si VAN > 0 → Aceptar la inversión.
    - Si VAN < 0 → Rechazar la inversión.
2. **Comparación de proyectos:**
   Cuando se comparan varios proyectos mutuamente excluyentes, se debe elegir el proyecto con el VAN más alto.
3. **Relación con la Tasa Interna de Retorno (TIR):**
    - La TIR es la tasa de descuento que hace que VAN = 0.
    - Si TIR > costo de capital → proyecto aceptable.

13.3 Ejemplos prácticos

Ejemplo 1:
Se planea un proyecto con inversión inicial de 50.000 €. Se esperan los siguientes flujos de caja:
Año 1: 20.000 €
Año 2: 25.000 €
Año 3: 30.000 €
Tasa de descuento: 10% anual

VAN = 20.000 / (1+0,10)^1 + 25.000 / (1+0,10)^2 + 30.000 / (1+0,10)^3 - 50.000
VAN = 18.181,82 + 20.661,16 + 22.539,12 - 50.000
VAN ≈ 11.382 € → Proyecto rentable

Ejemplo 2:
Inversión inicial: 40.000 €
Flujos de caja:
Año 1: 10.000 €
Año 2: 15.000 €
Año 3: 20.000 €
Tasa de descuento: 12%

VAN = 10.000 / 1,12 + 15.000 / (1,12)^2 + 20.000 / (1,12)^3 - 40.000
VAN = 8.928,57 + 11.960,53 + 14.244,16 - 40.000
VAN ≈ -4.866,74 € → Proyecto no rentable

Ejercicios Prácticos

Ejercicio 1:
Inversión inicial: 30.000 €
Flujos de caja: Año 1: 12.000 €, Año 2: 15.000 €, Año 3: 18.000 €
Tasa de descuento: 10%
Calcular VAN y determinar si el proyecto es rentable.

Solución:
VAN = 12.000 / 1,10 + 15.000 / (1,10)^2 + 18.000 / (1,10)^3 - 30.000
VAN = 10.909,09 + 12.396,69 + 13.518,88 - 30.000
VAN ≈ 6.824,66 € → Proyecto rentable

Ejercicio 2:
Inversión inicial: 25.000 €
Flujos de caja: Año 1: 8.000 €, Año 2: 10.000 €, Año 3: 12.000 €
Tasa de descuento: 8%
Calcular VAN.

Solución:
VAN = 8.000 / 1,08 + 10.000 / (1,08)^2 + 12.000 / (1,08)^3 - 25.000
VAN = 7.407,41 + 8.573,39 + 9.524,41 - 25.000
VAN ≈ 505,21 € → Proyecto ligeramente rentable

Ejercicio 3:
Inversión inicial: 60.000 €
Flujos de caja: Año 1: 20.000 €, Año 2: 25.000 €, Año 3: 35.000 €
Tasa de descuento: 15%
Calcular VAN.

Solución:
VAN = 20.000 / 1,15 + 25.000 / (1,15)^2 + 35.000 / (1,15)^3 - 60.000
VAN = 17.391,30 + 18.867,92 + 22.539,12 - 60.000
VAN ≈ -1.201,66 € → Proyecto no rentable

Ejercicio 4:
Se comparan dos proyectos mutuamente excluyentes:
Proyecto A: Inversión 40.000 €, flujos 15.000 €, 20.000 €, 25.000 €, tasa 10%
Proyecto B: Inversión 40.000 €, flujos 20.000 €, 20.000 €, 20.000 €, tasa 10%
Calcular VAN de ambos y decidir cuál aceptar.

Solución:
Proyecto A:
VAN = 15.000 / 1,10 + 20.000 / (1,10)^2 + 25.000 / (1,10)^3 - 40.000
VAN = 13.636,36 + 16.528,93 + 18.783,12 - 40.000
VAN ≈ 8.948,41 €

Proyecto B:
VAN = 20.000 / 1,10 + 20.000 / (1,10)^2 + 20.000 / (1,10)^3 - 40.000
VAN = 18.181,82 + 16.528,93 + 15.026,31 - 40.000
VAN ≈ 9.736,06 €

Decisión: Se acepta Proyecto B (VAN mayor)

Ejercicio 5:
Inversión inicial: 50.000 €
Flujos de caja esperados: Año 1: 15.000 €, Año 2: 20.000 €, Año 3: 25.000 €, Año 4: 20.000 €
Tasa de descuento: 12%
Calcular VAN.

Solución:
VAN = 15.000 / 1,12 + 20.000 / (1,12)^2 + 25.000 / (1,12)^3 + 20.000 / (1,12)^4 - 50.000
VAN = 13.392,86 + 15.929,92 + 17.793,98 + 12.699,11 - 50.000
VAN ≈ 9.815,87 € → Proyecto rentable

Ejercicios Prácticos

Ejercicio 1:
Un pagaré de 8.000 € vence en 1 año. Se aplica un descuento nominal del 10%. Calcula:
a) Descuento
b) Valor presente
c) Descuento efectivo

Solución:
D = 8.000 * 0,10 = 800 €
V = 8.000 - 800 = 7.200 €
d_e = 800 / 7.200 ≈ 0,1111 = 11,11%

Ejercicio 2:
Convierte una tasa nominal de descuento anual del 18% a tasa efectiva anual.

Solución:
d_e = 0,18 / (1 - 0,18) = 0,18 / 0,82 ≈ 0,2195 = 21,95%

Ejercicio 3:
Convierte una tasa efectiva de descuento anual del 21,95% a tasa nominal anual.

Solución:
d_n = 0,2195 / (1 + 0,2195) ≈ 0,18 = 18%

Ejercicio 4:
Un pagaré de 15.000 € vence en 1 año. Calcula la tasa de interés equivalente si el descuento efectivo aplicado es del 12%.

Solución:
i = 0,12 / (1 - 0,12) = 0,12 / 0,88 ≈ 0,13636 = 13,64%

Ejercicio 5:
Un documento de 20.000 € tiene un valor presente de 17.500 €. Calcula:
a) Descuento efectivo
b) Tasa de interés equivalente

Solución:
D = 20.000 - 17.500 = 2.500 €
d_e = 2.500 / 17.500 ≈ 0,14286 = 14,29%
i = 0,14286 / (1 - 0,14286) = 0,14286 / 0,85714 ≈ 0,1667 = 16,67%

Ejercicio 6:
Un pagaré vence en 18 meses por 12.000 €. Se aplica un descuento nominal semestral de 6%.
Calcula:
a) Valor presente
b) Descuento efectivo anual

Solución:
Número de semestres = 18 / 6 = 3
D = 12.000 * 0,06 * 3 = 2.160 €
V = 12.000 - 2.160 = 9.840 €
d_e anual = D / V anualizada ≈ 2.160 / 9.840 ≈ 0,2195 = 21,95% anual

---

14. Tasa Interna de Retorno (TIR)

La **Tasa Interna de Retorno (TIR)** es un indicador financiero que representa la tasa de descuento que hace que el **Valor Actual Neto (VAN)** de una inversión sea igual a cero. Se utiliza para evaluar la rentabilidad de proyectos o inversiones y compararlos entre sí.

14.1 Definición y cálculo

Definición:
La TIR es la tasa de rentabilidad promedio anual que iguala el valor presente de los flujos de caja futuros con la inversión inicial.

Fórmula:
VAN = ∑ (Flujos de Caja t / (1 + TIR)^t) - I0 = 0

Donde:
TIR = tasa interna de retorno
Flujos de Caja t = ingreso neto esperado en el período t
t = período
I0 = inversión inicial

Cálculo:

1. Se puede calcular mediante **prueba y error** usando distintas tasas hasta que VAN ≈ 0.
2. Se puede utilizar **método interpolación** para aproximar la TIR:

TIR ≈ i1 + [(VAN1 / (VAN1 - VAN2)) * (i2 - i1)]

Donde:
i1 = tasa inferior
i2 = tasa superior
VAN1 = VAN a i1
VAN2 = VAN a i2

3. En práctica, se utilizan **herramientas financieras** como calculadoras o Excel.

Interpretación:

- TIR > costo de capital → proyecto rentable
- TIR < costo de capital → proyecto no rentable

14.2 Comparación con VAN

1. **Criterios de decisión:**
    - VAN indica el valor monetario agregado por el proyecto.
    - TIR indica el porcentaje de rentabilidad.
2. **Relación:**
    - Si TIR > tasa de descuento → VAN > 0 → proyecto rentable
    - Si TIR < tasa de descuento → VAN < 0 → proyecto no rentable
3. **Ventaja de TIR:** permite comparar proyectos de diferente tamaño y duración en términos relativos (%).
4. **Ventaja de VAN:** proporciona el valor absoluto agregado, útil para decisiones sobre grandes inversiones.

14.3 Problemas resueltos

Ejemplo 1:
Inversión inicial: 40.000 €
Flujos de caja: Año 1: 15.000 €, Año 2: 20.000 €, Año 3: 25.000 €

Se desea calcular la TIR.

Prueba y error:

- Supongamos i = 10%
  VAN = 15.000 / 1,10 + 20.000 / (1,10)^2 + 25.000 / (1,10)^3 - 40.000
  VAN = 13.636,36 + 16.528,93 + 18.783,12 - 40.000 ≈ 8.948,41 → VAN positivo → aumentar tasa
- Supongamos i = 20%
  VAN = 15.000 / 1,20 + 20.000 / (1,20)^2 + 25.000 / (1,20)^3 - 40.000
  VAN = 12.500 + 13.888,89 + 14.537,04 - 40.000 ≈ 1.925,93 → VAN aún positivo → aumentar tasa
- Supongamos i = 25%
  VAN = 15.000 / 1,25 + 20.000 / (1,25)^2 + 25.000 / (1,25)^3 - 40.000
  VAN = 12.000 + 12.800 + 12.800 - 40.000 ≈ -3.400 → VAN negativo

Interpolación:
TIR ≈ 20% + [(1.925,93 / (1.925,93 + 3.400)) * (25% - 20%)]
TIR ≈ 20% + [1.925,93 / 5.325,93 * 5%] ≈ 20% + 1,81% ≈ 21,81%

Conclusión: TIR ≈ 21,8% → mayor que cualquier tasa de descuento < 21,8% → proyecto rentable

---

Ejemplo 2:
Inversión inicial: 50.000 €
Flujos: Año 1: 10.000 €, Año 2: 15.000 €, Año 3: 20.000 €, Año 4: 25.000 €

Supongamos tasa de descuento 12%

Prueba y error:
i = 15% → VAN = 10.000 / 1,15 + 15.000 / (1,15)^2 + 20.000 / (1,15)^3 + 25.000 / (1,15)^4 - 50.000
VAN = 8.695,65 + 11.337,87 + 13.138,09 + 14.157,27 - 50.000 ≈ -2.670,12 → VAN negativo

i = 12% → VAN = 8.928,57 + 11.940,43 + 14.184,12 + 15.885,18 - 50.000 ≈ 492,30 → VAN positivo

Interpolación:
TIR ≈ 12% + [492,30 / (492,30 + 2.670,12) * (15%-12%)]
TIR ≈ 12% + [492,30 / 3.162,42 * 3%] ≈ 12% + 0,47% ≈ 12,47%

Conclusión: TIR ≈ 12,5% → ligeramente rentable si costo de capital < 12,5%

Ejercicios prácticos

Ejercicio 1:
Inversión inicial: 30.000 €
Flujos de caja: Año 1: 12.000 €, Año 2: 15.000 €, Año 3: 18.000 €
Calcular TIR.

Solución:
i = 10% → VAN = 10.909,09 + 12.396,69 + 13.518,88 - 30.000 ≈ 6.824,66 → positivo → aumentar tasa
i = 25% → VAN = 9.600 + 9.600 + 9.216 - 30.000 ≈ -1.584 → negativo
Interpolación: TIR ≈ 10% + (6.824,66 / (6.824,66 + 1.584) * 15%) ≈ 10% + 11,9% ≈ 21,9%

Ejercicio 2:
Inversión inicial: 40.000 €
Flujos: Año 1: 15.000 €, Año 2: 20.000 €, Año 3: 25.000 €
Calcular TIR.

Solución:
Ya resuelto en ejemplo 1 → TIR ≈ 21,8%

Ejercicio 3:
Inversión inicial: 50.000 €
Flujos: Año 1: 15.000 €, Año 2: 20.000 €, Año 3: 15.000 €, Año 4: 10.000 €
Prueba con i = 10% → VAN ≈ 3.344 → positivo
i = 20% → VAN ≈ -3.093 → negativo
Interpolación: TIR ≈ 10% + (3.344 / (3.344 + 3.093) * 10%) ≈ 10% + 5,1% ≈ 15,1%

Ejercicio 4:
Comparar dos proyectos mutuamente excluyentes:
Proyecto A: Inversión 60.000 €, flujos: 20.000 €, 25.000 €, 30.000 €
Proyecto B: Inversión 60.000 €, flujos: 25.000 €, 25.000 €, 25.000 €

Calcular TIR y decidir.

Solución:
Proyecto A: i = 10% → VAN ≈ 8.948 → positivo, i = 25% → VAN ≈ -3.400
TIR ≈ 21,8%

Proyecto B: i = 10% → VAN ≈ 9.736 → positivo, i = 25% → VAN ≈ -3.240
TIR ≈ 22,2%

Decisión: Se elige Proyecto B (TIR mayor)

Ejercicio 5:
Inversión inicial: 45.000 €
Flujos: Año 1: 12.000 €, Año 2: 18.000 €, Año 3: 22.000 €, Año 4: 25.000 €

Solución:
i = 10% → VAN ≈ 10.994 → positivo
i = 20% → VAN ≈ -1.632 → negativo
Interpolación: TIR ≈ 10% + (10.994 / (10.994 + 1.632) * 10%) ≈ 10% + 87% ≈ 18,7%

---

15. Período de Recuperación de la Inversión (PRI)

El Período de Recuperación de la Inversión (PRI), también conocido como *payback period*, es un método financiero que permite determinar el tiempo necesario para recuperar la inversión inicial de un proyecto a partir de los flujos de caja netos que genera.

Objetivos de la lección:

- Comprender el concepto de PRI.
- Diferenciar entre el método simple y el método descontado.
- Aplicar estos métodos a problemas prácticos.

15.1 Método Simple

Definición:
El método simple de PRI consiste en calcular cuántos períodos (años, meses, etc.) se necesitan para que la suma de los flujos de caja netos iguale la inversión inicial. No considera el valor del dinero en el tiempo.

Fórmula:
PRI = Tiempo necesario para que la suma acumulada de los flujos de caja sea igual a la inversión inicial.

Procedimiento:

1. Identificar la inversión inicial (I).
2. Listar los flujos de caja netos por período (FC1, FC2, FC3, …).
3. Calcular la suma acumulada de los flujos de caja.
4. Determinar el período en el que la suma acumulada iguala o supera la inversión inicial.

Ejemplo 1:
Inversión inicial: 50,000
Flujos de caja anuales: 15,000, 20,000, 10,000, 15,000

Solución:
Año 1: 15,000 → Acumulado: 15,000
Año 2: 20,000 → Acumulado: 35,000
Año 3: 10,000 → Acumulado: 45,000
Año 4: 15,000 → Acumulado: 60,000

PRI ≈ Entre el año 3 y el 4
Fórmula para interpolar: PRI = 3 + (50,000 - 45,000)/15,000 = 3 + 5,000/15,000 = 3,33 años

---

Ejercicio 1:
Inversión inicial: 80,000
Flujos de caja: 20,000; 25,000; 30,000; 20,000
Calcular PRI mediante el método simple.

Solución:
Año 1: 20,000 → Acumulado: 20,000
Año 2: 25,000 → Acumulado: 45,000
Año 3: 30,000 → Acumulado: 75,000
Año 4: 20,000 → Acumulado: 95,000

PRI = 3 + (80,000 - 75,000)/20,000 = 3 + 5,000/20,000 = 3,25 años

---

15.2 Método Descontado

Definición:
El método descontado considera el valor del dinero en el tiempo. Los flujos de caja futuros se descuentan a su valor presente mediante una tasa de descuento (k).

Fórmula:
PRI descontado = Tiempo necesario para que la suma acumulada de los flujos de caja descontados iguale la inversión inicial.

Flujo de caja descontado: FCt / (1 + k)^t

Procedimiento:

1. Determinar la tasa de descuento (k).
2. Calcular los flujos de caja descontados de cada período.
3. Sumar los flujos descontados hasta igualar la inversión inicial.

Ejemplo 2:
Inversión inicial: 50,000
Flujos de caja anuales: 15,000; 20,000; 10,000; 15,000
Tasa de descuento: 10%

Solución:
Año 1: 15,000 / (1+0.1)^1 = 13,636,36 → Acumulado: 13,636,36
Año 2: 20,000 / (1+0.1)^2 = 16,528,93 → Acumulado: 30,165,29
Año 3: 10,000 / (1+0.1)^3 = 7,513,15 → Acumulado: 37,678,44
Año 4: 15,000 / (1+0.1)^4 = 10,239,71 → Acumulado: 47,918,15

PRI descontado ≈ Entre el año 4 y 5
Interpolación: PRI = 4 + (50,000 - 47,918,15)/10,239,71 = 4 + 2,081,85/10,239,71 ≈ 4,20 años

---

Ejercicio 2:
Inversión inicial: 100,000
Flujos de caja: 25,000; 30,000; 40,000; 35,000
Tasa de descuento: 8%
Calcular PRI descontado.

Solución:
Año 1: 25,000 / 1.08^1 = 23,148,15 → Acumulado: 23,148,15
Año 2: 30,000 / 1.08^2 = 25,720,16 → Acumulado: 48,868,31
Año 3: 40,000 / 1.08^3 = 31,857,71 → Acumulado: 80,726,02
Año 4: 35,000 / 1.08^4 = 25,856,14 → Acumulado: 106,582,16

PRI descontado = 3 + (100,000 - 80,726,02)/25,856,14 ≈ 3 + 19,273,98/25,856,14 ≈ 3,74 años

---

15.3 Aplicaciones prácticas

1. **Evaluación de proyectos:** PRI indica qué proyectos recuperan la inversión más rápido.
2. **Decisiones de liquidez:** Útil para empresas con necesidad de recuperar capital pronto.
3. **Comparación rápida:** Permite comparar varios proyectos con inversión y flujos similares.

Ejercicio 3:
Una empresa tiene dos proyectos A y B con las siguientes características:

- Proyecto A: Inversión 60,000; Flujos: 20,000; 25,000; 30,000; 25,000
- Proyecto B: Inversión 60,000; Flujos: 15,000; 20,000; 35,000; 40,000
- Tasa de descuento: 5%

Calcular PRI descontado para ambos y decidir cuál recuperar la inversión más rápido.

Solución:
Proyecto A:
Año 1: 20,000/1.05 = 19,047,62 → Acum: 19,047,62
Año 2: 25,000/1.05^2 = 22,675,74 → Acum: 41,723,36
Año 3: 30,000/1.05^3 = 25,899,20 → Acum: 67,622,56

PRI A ≈ 2 + (60,000 - 41,723,36)/25,899,20 = 2 + 18,276,64/25,899,20 ≈ 2,71 años

Proyecto B:
Año 1: 15,000/1.05 = 14,285,71 → Acum: 14,285,71
Año 2: 20,000/1.05^2 = 18,140,59 → Acum: 32,426,30
Año 3: 35,000/1.05^3 = 30,216,29 → Acum: 62,642,59

PRI B ≈ 2 + (60,000 - 32,426,30)/30,216,29 = 2 + 27,573,70/30,216,29 ≈ 2,91 años

Conclusión: Proyecto A recupera la inversión más rápido.

Resumen:

- PRI simple: rápido, sin considerar valor del dinero.
- PRI descontado: preciso, considera valor temporal del dinero.
- Útil para decisiones de liquidez y evaluación rápida de proyectos.

16.1 Fórmula y utilidad

Fórmula del Índice de Rentabilidad (IR):
IR = Valor Presente de los Flujos de Caja Futuros / Inversión Inicial

- **Valor Presente de los Flujos de Caja Futuros:** Es el valor actual de todos los flujos de efectivo que se espera recibir del proyecto, descontados a una tasa que refleje el costo de capital o la rentabilidad mínima exigida.
- **Inversión Inicial:** Es el monto total invertido al inicio del proyecto.

Interpretación:

- IR > 1 → La inversión es rentable, ya que genera más valor del que costó.
- IR = 1 → La inversión recupera exactamente lo invertido, sin ganancia adicional.
- IR < 1 → La inversión no es rentable, ya que los beneficios no cubren el costo inicial.

Utilidad del IR:

- Permite priorizar proyectos cuando hay recursos limitados.
- Considera la magnitud de los flujos de efectivo y el valor del dinero en el tiempo.
- Es útil para tomar decisiones de inversión comparando varios proyectos.

16.2 Casos prácticos

Ejemplo 1:
Una empresa quiere invertir 100.000 USD en un proyecto que generará flujos de caja anuales de 30.000 USD durante 4 años. La tasa de descuento es del 10%.

Solución:

1. Calcular el valor presente de los flujos de caja usando la fórmula de valor presente de anualidades:
   VP = F × [(1 - (1 + r)^-n) / r]
   VP = 30.000 × [(1 - (1 + 0,1)^-4) / 0,1]
   VP = 30.000 × [(1 - 0,6830) / 0,1]
   VP = 30.000 × [0,3170 / 0,1]
   VP = 30.000 × 3,17
   VP = 95.100 USD
2. Calcular el índice de rentabilidad:
   IR = VP / Inversión Inicial
   IR = 95.100 / 100.000
   IR = 0,951

Interpretación:
IR < 1 → La inversión no es rentable porque el valor presente de los flujos de caja es menor que la inversión inicial.

Ejemplo 2:
Un proyecto requiere una inversión de 50.000 USD y se espera que genere flujos de caja de 20.000 USD el primer año, 25.000 USD el segundo año y 30.000 USD el tercer año. La tasa de descuento es 8%.

Solución:

1. Calcular el valor presente de cada flujo:
   VP1 = 20.000 / (1 + 0,08)^1 = 20.000 / 1,08 = 18.518,52
   VP2 = 25.000 / (1 + 0,08)^2 = 25.000 / 1,1664 = 21.440,12
   VP3 = 30.000 / (1 + 0,08)^3 = 30.000 / 1,2597 = 23.823,43

VP total = 18.518,52 + 21.440,12 + 23.823,43 = 63.782,07 USD

2. Calcular el índice de rentabilidad:
   IR = VP / Inversión Inicial
   IR = 63.782,07 / 50.000
   IR = 1,276

Interpretación:
IR > 1 → La inversión es rentable y genera un valor adicional del 27,6% sobre lo invertido.

Ejercicios propuestos:

Ejercicio 1:
Una empresa quiere invertir 120.000 USD en un proyecto que generará flujos de caja de 40.000 USD anuales durante 5 años. La tasa de descuento es del 12%. Calcular el índice de rentabilidad e interpretar el resultado.

Solución:
VP = 40.000 × [(1 - (1 + 0,12)^-5) / 0,12]
(1 + 0,12)^5 = 1,12^5 ≈ 1,7623
1 / 1,7623 ≈ 0,5676
1 - 0,5676 = 0,4324
0,4324 / 0,12 = 3,6033
VP = 40.000 × 3,6033 ≈ 144.132 USD
IR = 144.132 / 120.000 ≈ 1,201
Interpretación: IR > 1 → Proyecto rentable.

Ejercicio 2:
Invertir 80.000 USD en un proyecto que genera 30.000 USD el primer año, 25.000 USD el segundo y 20.000 USD el tercero. Tasa de descuento 10%. Calcular IR.

Solución:
VP1 = 30.000 / 1,10 = 27.272,73
VP2 = 25.000 / 1,21 = 20.661,16
VP3 = 20.000 / 1,331 = 15.028,28
VP total = 27.272,73 + 20.661,16 + 15.028,28 = 62.962,17
IR = 62.962,17 / 80.000 ≈ 0,787
Interpretación: IR < 1 → Proyecto no rentable.

Ejercicio 3:
Un proyecto de inversión de 60.000 USD genera flujos de caja de 25.000 USD el primer año y 40.000 USD el segundo año. Tasa de descuento 15%. Determinar IR.

Solución:
VP1 = 25.000 / 1,15 = 21.739,13
VP2 = 40.000 / 1,3225 = 30.245,40
VP total = 21.739,13 + 30.245,40 = 51.984,53
IR = 51.984,53 / 60.000 ≈ 0,867

Interpretación: IR < 1 → Proyecto no rentable.

Ejercicio 4:
Calcular el índice de rentabilidad de un proyecto que requiere 150.000 USD y genera 50.000 USD anuales durante 5 años con tasa de descuento del 8%.

Solución:
VP = 50.000 × [(1 - (1 + 0,08)^-5) / 0,08]
(1 + 0,08)^5 = 1,4693
1 / 1,4693 ≈ 0,6806
1 - 0,6806 = 0,3194
0,3194 / 0,08 = 3,9925
VP = 50.000 × 3,9925 ≈ 199.625 USD
IR = 199.625 / 150.000 ≈ 1,331
Interpretación: IR > 1 → Proyecto rentable.

Ejercicio 5:
Proyecto con inversión de 200.000 USD y flujos de 60.000 USD por 6 años. Tasa de descuento 9%. Determinar IR.

Solución:
VP = 60.000 × [(1 - (1 + 0,09)^-6) / 0,09]
(1 + 0,09)^6 ≈ 1,6895
1 / 1,6895 ≈ 0,5919
1 - 0,5919 = 0,4081
0,4081 / 0,09 ≈ 4,5344
VP = 60.000 × 4,5344 ≈ 272.064 USD
IR = 272.064 / 200.000 ≈ 1,360
Interpretación: IR > 1 → Proyecto rentable.

Parte VI: Matematicas Financieras Avanzadas

17.1 Conceptos de riesgo financiero

Riesgo financiero: Probabilidad de que los resultados reales de una inversión difieran de los esperados.

Tipos de riesgo:

- **Riesgo sistemático:** Afecta a todo el mercado o a una clase de activos, como crisis económicas o cambios en políticas monetarias. No puede eliminarse mediante diversificación.
- **Riesgo no sistemático:** Es específico de una empresa o sector, como problemas de gestión o fallos de producción. Puede reducirse mediante diversificación.

Medidas de riesgo:

- **Varianza (σ^2):** Mide la dispersión de los rendimientos respecto a su media.
- **Desviación estándar (σ):** Raíz cuadrada de la varianza. Indica el grado de volatilidad de los rendimientos.
- **Beta (β):** Mide la sensibilidad del activo frente a movimientos del mercado. $\beta > 1$ indica mayor volatilidad que el mercado; $\beta < 1$ indica menor volatilidad.

Rendimiento esperado (E[R]): Es la media ponderada de los posibles rendimientos según su probabilidad.

Fórmula:
$E[R] = \Sigma (R_i \times P_i)$

Donde:

- R_i = rendimiento posible
- P_i = probabilidad de que ocurra ese rendimiento

17.2 Modelos de evaluación de riesgo

1. Modelo de Varianza y Desviación Estándar

Se utiliza para medir la volatilidad de los rendimientos de un activo:

- Varianza: $\sigma^2 = \Sigma\ P_i \times (R_i - E[R])^2$
- Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Ejemplo:
Rendimientos posibles de una acción: 5%, 10%, 15% con probabilidades 0,3, 0,4 y 0,3 respectivamente.

E[R] = 0,3×5 + 0,4×10 + 0,3×15 = 1,5 + 4 + 4,5 = 10%

Varianza:
σ^2 = 0,3*(5-10)² + 0,4*(10-10)² + 0,3*(15-10)²
σ^2 = 0,3*25* + *0* + *0,3*25 = 7,5 + 7,5 = 15
Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{15} \approx 3,873\%$

2. Modelo de CAPM (Capital Asset Pricing Model)

Relación entre riesgo y rendimiento esperado:
$E[R_i] = R_f + \beta_i \times (E[R_m] - R_f)$

Donde:

- $E[R_i]$ = rendimiento esperado del activo i
- R_f = tasa libre de riesgo
- β_i = beta del activo i
- $E[R_m]$ = rendimiento esperado del mercado

Interpretación: Cuanto mayor sea el riesgo sistemático (β), mayor será el rendimiento exigido por los inversionistas.

Ejemplo:
R_f = 3%, $E[R_m]$ = 12%, β = 1,2
$E[R_i]$ = 3 + 1,2*(12-3) = 3 + 1,2*9 = 3 + 10,8 = 13,8%

17.3 Diversificación de inversiones

Diversificación: Estrategia que consiste en invertir en distintos activos para reducir el riesgo no sistemático.

- **Riesgo total (σ_p)** de una cartera:
  $\sigma_p^2 = \Sigma\, w_i^2\, \sigma_i^2 + \Sigma\Sigma\, w_i\, w_j\, Cov(R_i,R_j)$ para $i \neq j$

Donde:

- w_i = proporción invertida en el activo i
- σ_i^2 = varianza del activo i
- $Cov(R_i,R_j)$ = covarianza entre los activos i y j

Principio: Invertir en activos que no estén perfectamente correlacionados reduce el riesgo total de la cartera sin necesariamente disminuir el rendimiento esperado.

Ejemplo:
Cartera con dos activos:

- Activo A: rendimiento esperado 8%, σ = 10%
- Activo B: rendimiento esperado 12%, σ = 15%
- Pesos: $w_A = 0,6$, $w_B = 0,4$
- Covarianza = 0,001

$\sigma_p^2 = 0,6^2 0,01 + 0,4^2 0,0225 + 2 0,6 0,4 * 0,001$
$\sigma_p^2 = 0,0036 + 0,0036 + 0,00048 \approx 0,00768$
$\sigma_p \approx \sqrt{0,00768} \approx 8,77\%$

La cartera tiene menor riesgo que cualquiera de los activos individuales debido a la diversificación.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:
Rendimientos posibles: 6%, 10%, 14% con probabilidades 0,2, 0,5 y 0,3. Calcular:
a) Rendimiento esperado
b) Varianza
c) Desviación estándar

Solución:
$E[R] = 0,2 6 + 0,5 10 + 0,3 14 = 1,2 + 5 + 4,2 = 10,4\%$
$Varianza = 0,2(6-10,4)^2 + 0,5*(10-10,4)^2 + 0,3*(14-10,4)^2$
$= 0,2 19,36 + 0,5 0,16 + 0,3*12,96 = 3,872 + 0,08 + 3,888 \approx 7,84$
Desviación estándar = $\sqrt{7,84} \approx 2,80\%$

Ejercicio 2:
Calcular el rendimiento esperado según CAPM para un activo con β = 0,9, R_f = 4%, E[R_m] = 11%.

Solución:
E[R_i] = 4 + 0,9*(11-4) = 4 + 0,9*7 = 4 + 6,3 = 10,3%

Ejercicio 3:
Cartera con dos activos:

- Activo X: σ = 12%, peso 50%
- Activo Y: σ = 18%, peso 50%
- Cov(X,Y) = 0,002

σ_p² = 0,5²*0,0144* + *0,5²*0,0324 + 2*0,5*0,5*0,002
= 0,0036 + 0,0081 + 0,001 = 0,0127
σ_p ≈ √0,0127 ≈ 11,27%

Ejercicio 4:
Rendimientos posibles de un activo: 5%, 15%, 20% con probabilidades 0,3, 0,4, 0,3. Calcular E[R] y σ.

Solución:
E[R] = 0,3*5* + *0,4*15 + 0,3*20* = *1,5 + 6 + 6 = 13,5%*
Varianza = 0,3(5-13,5)² + 0,4*(15-13,5)² + 0,3*(20-13,5)²
= 0,3*72,25* + *0,4*2,25 + 0,3*42,25 = 21,675 + 0,9 + 12,675 ≈ 35,25
σ ≈ √35,25 ≈ 5,94%

Ejercicio 5:
Invertir en una cartera con:

- Activo A: E[R]=10%, σ=8%, w=0,6
- Activo B: E[R]=15%, σ=12%, w=0,4
- Cov(A,B)=0,001

σ_p² = 0,6²*0,0064* + *0,4²*0,0144 + 2*0,6*0,4*0,001
= 0,002304 + 0,002304 + 0,00048 = 0,005088
σ_p ≈ √0,005088 ≈ 7,13%

Ejercicio 6:
CAPM: β=1,5, R_f=2%, E[R_m]=10%. Calcular E[R_i].

Solución:
E[R_i] = 2 + 1,5*(10-2) = 2 + 12 = 14%

Ejercicio 7:
Diversificación: dos activos:

- A: σ=10%, w=0,7
- B: σ=20%, w=0,3
- Cov=0,003

σ_p² = 0,7²*0,01 + 0,3²*0,04 + 2*0,7*0,3*0,

18. Valoración de Bonos

Los **bonos** son instrumentos de deuda emitidos por gobiernos o empresas que prometen pagar intereses periódicos (cupones) y devolver el capital al vencimiento. La **valoración de bonos** consiste en determinar su **precio justo** tomando en cuenta los flujos de efectivo futuros y la tasa de rendimiento exigida por el mercado.

18.1 Tipos de bonos

Existen varios tipos de bonos, entre los más comunes:

1. **Bonos cupón fijo:** Pagan intereses periódicos fijos hasta el vencimiento.
2. **Bonos cupón cero:** No pagan intereses periódicos; se venden con descuento y pagan solo el valor nominal al vencimiento.
3. **Bonos con tasa variable:** El cupón se ajusta según una tasa de referencia (por ejemplo, Euribor + 2%).
4. **Bonos convertibles:** Pueden convertirse en acciones del emisor.
5. **Bonos con prima o descuento:** Su precio inicial puede ser superior o inferior al valor nominal, dependiendo de la tasa de mercado.

Ejemplo 1: Tipos de bonos

- Bono cupón fijo: Valor nominal 1.000 €, cupón 5% anual.
- Bono cupón cero: Valor nominal 1.000 €, vencimiento 5 años, precio actual 800 €.

18.2 Cálculo de precio y rendimiento

El **precio de un bono** es el valor presente de sus flujos de efectivo (cupones y principal) descontados a la **tasa de rendimiento requerida** `r`.

Fórmula para bonos con cupón:

```
P = C / (1 + r) + C / (1 + r)^2 + ... + C / (1 + r)^n + F / (1 + r)^n
```

Donde:

- `P` = precio del bono
- `C` = cupón anual
- `F` = valor nominal del bono
- `n` = número de años hasta vencimiento
- `r` = rendimiento requerido por el mercado
-

Bono cupón cero:

```
P = F / (1 + r)^n
```

Ejemplo 2: Bono con cupón

Un bono de 1.000 € paga un cupón anual de 50 € durante 5 años. La tasa de rendimiento requerida es 6%.

Solución:

```
P = 50 / 1.06 + 50 / (1.06)^2 + 50 / (1.06)^3 + 50 / (1.06)^4 + 50 / (1.06)^5 + 1000 / (1.06)^5
```

```
P = 47.17 + 44.47 + 41.94 + 39.57 + 37.30 + 747.26
```

```
P = 957.71 €
```

Ejercicio 1

Un bono tiene valor nominal de 1.000 €, paga un cupón anual de 60 € y vence en 4 años. La tasa de rendimiento requerida es 5%.

Calcular el precio del bono.

Solución:

```
P = 60 / 1.05 + 60 / (1.05)^2 + 60 / (1.05)^3 + 60 / (1.05)^4 + 1000 / (1.05)^4
```

```
P = 57.14 + 54.42 + 51.83 + 49.36 + 822.70
```

```
P = 1035.45 €
```

Ejercicio 2: Bono cupón cero

Un bono cupón cero tiene valor nominal de 1.000 € y vence en 5 años. La tasa de rendimiento requerida es 7%.

Calcular el precio del bono.

Solución:

```
P = F / (1 + r)^n = 1000 / (1.07)^5 = 1000 / 1.40255 = 713.00 €
```

18.3 Bonos con descuento y prima

- **Bono con descuento:** Se vende por menos de su valor nominal (`P < F`). Ocurre cuando la tasa de rendimiento del mercado `r` es mayor que la tasa del cupón `C/F`.
- **Bono con prima:** Se vende por encima del valor nominal (`P > F`). Ocurre cuando la tasa del cupón es mayor que la tasa de rendimiento exigida.

Ejemplo 3: Bono con prima

Bono de 1.000 € con cupón de 8%, vence en 3 años, tasa de mercado 5%.

Solución:

```
C = 1000 * 0.08 = 80 €
```

```
P = 80 / 1.05 + 80 / (1.05)^2 + 80 / (1.05)^3 + 1000 / (1.05)^3
```

```
P = 76.19 + 72.56 + 69.10 + 863.84
```

```
P = 1081.69 €
```

- Como P > 1.000 €, el bono se vende con **prima**.

Ejercicio 3

Bono de 1.000 € con cupón anual de 4%, vence en 6 años. La tasa de mercado es 6%.

Calcular precio y determinar si es descuento o prima.

Solución:

```
C = 1000 * 0.04 = 40 €
```

```
P = 40 / 1.06 + 40 / (1.06)^2 + 40 / (1.06)^3 + 40 / (1.06)^4 + 40 / (1.06)^5 + 40 / (1.06)^6 + 1000 / (1.06)^6
```

```
P = 37.74 + 35.58 + 33.55 + 31.63 + 29.83 + 28.14 + 705.01
```

```
P = 901.48 €
```

- Como P < 1.000 €, el bono se vende con **descuento**.

Resumen

- Los bonos se valoran como **flujos de efectivo descontados**.
- Los **bonos con cupón** suman cupones y principal descontados.
- Los **bonos cupón cero** se descuentan solo por el valor nominal.
- **Prima y descuento** dependen de la relación entre la tasa del cupón y la tasa de mercado.

---

19. Valoración de Acciones

La **valoración de acciones** consiste en determinar el **precio justo de mercado de una acción** basado en los flujos de efectivo que se espera genere para sus propietarios, principalmente en forma de dividendos. La valoración adecuada es fundamental para tomar decisiones de inversión informadas.

19.1 Modelos de dividendos

Los **modelos de dividendos** se basan en la idea de que el **valor de una acción** es el **valor presente de los dividendos futuros esperados**.

Modelo general de valoración por dividendos:

```
P0 = D1 / (1 + r) + D2 / (1 + r)^2 + ... + Dn / (1 + r)^n
```

Donde:

- `P0` = precio actual de la acción
- `Dn` = dividendo esperado en el año n
- `r` = tasa de rendimiento requerida por el inversionista

Nota: Este modelo funciona mejor para empresas que pagan dividendos constantes o crecientes de manera predecible.

Ejemplo 1: Valoración con dividendos constantes

Una empresa paga un dividendo anual de 5 €. La tasa de rendimiento requerida es 10%.

Solución:

```
Si los dividendos son perpetuos y constantes: P0 = D / r = 5 / 0.10 = 50 €
```

Ejercicio 1

Una acción paga dividendos constantes de 3 € al año. La tasa de rendimiento requerida es 8%.

Calcular el precio de la acción.

Solución:

```
P0 = D / r = 3 / 0.08 = 37.50 €
```

19.2 Modelos de crecimiento constante

Cuando los dividendos **crecen a una tasa constante g**, se utiliza el **modelo de Gordon-Shapiro** o **modelo de crecimiento constante**:

```
P0 = D1 / (r - g)
```

Donde:

- `D1` = dividendo esperado el próximo año
- `g` = tasa de crecimiento constante de dividendos

Condición: r > g

Ejemplo 2: Valoración con crecimiento constante

Una empresa pagó 4 € de dividendo este año y se espera que crezca 5% anual. La tasa de rendimiento requerida es 12%.

Solución:

```
D1 = 4 * (1 + 0.05) = 4.20 €
```

```
P0 = 4.20 / (0.12 - 0.05) = 4.20 / 0.07 = 60 €
```

Ejercicio 2

Una acción paga 2 € este año, se espera que crezca 6% anualmente, y la tasa de rendimiento requerida es 10%.

Calcular el precio de la acción.

Solución:

```
D1 = 2 * 1.06 = 2.12 €
```

```
P0 = 2.12 / (0.10 - 0.06) = 2.12 / 0.04 = 53 €
```

Ejercicio 3: Crecimiento variable

Una acción paga 1 € este año. Se espera que crezca 10% anual los primeros 3 años, y luego 5% de manera constante. La tasa requerida es 12%.

Solución paso a paso:

1. Calcular los dividendos futuros los primeros 3 años:

```
D1 = 1 * 1.10 = 1.10
D2 = 1.10 * 1.10 = 1.21
D3 = 1.21 * 1.10 = 1.331
```

2. Calcular el valor presente de estos dividendos:

```
PV(D1) = 1.10 / 1.12 = 0.9821
PV(D2) = 1.21 / (1.12)^2 = 0.9635
PV(D3) = 1.331 / (1.12)^3 = 0.9477
```

3. Calcular el precio al final del año 3 usando crecimiento constante de 5%:

```
D4 = D3 * 1.05 = 1.331 * 1.05 = 1.39755
P3 = D4 / (r - g) = 1.39755 / (0.12 - 0.05) = 19.965 €
```

4. Valor presente de P3:

```
PV(P3) = 19.965 / (1.12)^3 = 14.22 €
```

5. Precio total:

```
P0 = 0.9821 + 0.9635 + 0.9477 + 14.22 = 17.11 €
```

19.3 Aplicaciones prácticas

1. **Determinación de si una acción está sobrevalorada o subvalorada:**
    - Si `P0 calculado > P mercado` → acción subvalorada → oportunidad de compra.
    - Si `P0 calculado < P mercado` → acción sobrevalorada → considerar venta.
2. **Planificación de dividendos y crecimiento:**
    - Empresas pueden planificar pagos de dividendos y reinversión de utilidades según tasas de crecimiento y valor de mercado deseado.
3. **Evaluación de proyectos de inversión en acciones:**
    - Comparar el retorno esperado de la acción con otros instrumentos financieros.

Ejercicio 4: Aplicación práctica

La acción de la empresa XYZ se cotiza a 45 €. Paga un dividendo anual de 3 €, que se espera crezca 4% anual. La tasa requerida por el mercado es 10%.

Determinar si la acción está sobrevalorada o subvalorada.

Solución:

```
D1 = 3 * 1.04 = 3.12 €
```

```
P0 = 3.12 / (0.10 - 0.04) = 3.12 / 0.06 = 52 €
```

- Como 52 € > 45 €, la acción está **subvalorada** → oportunidad de compra.

Resumen

- La **valoración por dividendos** es la base de la valoración de acciones.
- Los **modelos de crecimiento constante** permiten proyectar dividendos futuros.
- Las **aplicaciones prácticas** incluyen decisión de compra/venta, planificación de dividendos y análisis comparativo.

---

20. Operaciones Financieras con Títulos

Las **operaciones financieras con títulos** son transacciones que involucran **instrumentos de crédito**, como letras de cambio y pagarés, y que permiten obtener **financiación anticipada** o calcular rendimientos sobre los mismos. Comprender estas operaciones es fundamental para la gestión financiera de empresas y bancos.

20.1 Letras de cambio y pagarés

Letras de cambio

Una **letra de cambio** es un **documento por el cual una persona (librador) ordena a otra (librado) pagar una cantidad determinada a un tercero (beneficiario) en una fecha futura**.

Características principales:

- Documento escrito y formal.
- Contiene fecha de emisión y vencimiento.
- Puede ser negociable o endosable.
- Permite obtener financiación mediante descuento bancario.

Pagarés

Un **pagaré** es un **documento por el cual una persona se compromete a pagar una cantidad determinada a otra en una fecha futura**.

Diferencias clave con la letra de cambio:

- En el pagaré hay **un único obligado** (el emisor del pagaré).
- En la letra de cambio hay **tres partes**: librador, librado y beneficiario.

Ejemplo 1: Reconocimiento de letra de cambio

Una empresa recibe una letra de cambio de 10.000 € a 90 días.

- Librador: Empresa A
- Librado: Empresa B
- Beneficiario: Empresa C

Interpretación: La Empresa B debe pagar 10.000 € a la Empresa C en 90 días.

Ejercicio 1

Identifica las partes de una letra de cambio de 5.000 € emitida por la Empresa X, que debe pagar la Empresa Y a la Empresa Z en 60 días.

Solución:

- Librador: Empresa X
- Librado: Empresa Y
- Beneficiario: Empresa Z
- Importe: 5.000 €
- Plazo: 60 días

20.2 Descuento bancario

El **descuento bancario** permite obtener **dinero en efectivo antes del vencimiento de un título**. El banco descuenta los intereses correspondientes al plazo restante y entrega el efectivo al tenedor del título.

Fórmula del descuento simple:

```
D = F * d * (t / 360)
```

Donde:

- `D` = descuento bancario
- `F` = valor nominal del título
- `d` = tasa de descuento anual
- `t` = días hasta vencimiento

Importe recibido por el tenedor:

```
V = F - D
```

Ejemplo 2: Descuento bancario

Un pagaré de 12.000 € vence en 90 días. La tasa de descuento anual es 8%.

Solución:

```
D = 12.000 * 0.08 * (90 / 360) = 240 €
```

```
V = 12.000 - 240 = 11.760 €
```

El tenedor recibe **11.760 €** al descontar el pagaré.

Ejercicio 2

Una letra de cambio de 15.000 € vence en 120 días. La tasa de descuento es 6% anual.

Calcular el descuento y el valor recibido.

Solución:

```
D = 15.000 * 0.06 * (120 / 360) = 300 €
```

```
V = 15.000 - 300 = 14.700 €
```

Ejercicio 3: Descuento compuesto

Si el banco utiliza **descuento compuesto**, el valor recibido se calcula con:

```
V = F / (1 + d * t / 360)
```

Un pagaré de 10.000 € vence en 180 días, con tasa de descuento del 10% anual.

Solución:

```
V = 10.000 / (1 + 0.10 * 180 / 360) = 10.000 / 1.05 ≈ 9.523,81 €
```

20.3 Cálculo de rendimientos

El **rendimiento efectivo** obtenido por el tenedor de un título descontado permite comparar con otras inversiones.

Rendimiento simple:

```
i = D / V * (360 / t)
```

Donde:

- `i` = rendimiento anual
- `D` = descuento
- `V` = valor recibido
- `t` = días hasta vencimiento

Ejemplo 3: Rendimiento

Pagaré de 8.000 € descontado a 90 días con tasa de 9%, recibe 7.820 € el tenedor.

```
D = 8.000 - 7.820 = 180 €
```

```
i = 180 / 7.820 * (360 / 90) ≈ 0.8289 ≈ 8,29% anual
```

Ejercicio 4

Letra de cambio de 20.000 € a 60 días. Se recibe 19.700 €. Calcular el rendimiento anual.

Solución:

```
D = 20.000 - 19.700 = 300 €
```

```
i = 300 / 19.700 * (360 / 60) = 300 / 19.700 * 6 ≈ 0.0913 ≈ 9,13% anual
```

Ejercicio 5: Comparación de operaciones

Comparar dos pagarés:

- Pagaré A: 12.000 €, 120 días, valor recibido 11.800 €
- Pagaré B: 15.000 €, 90 días, valor recibido 14.850 €

Calcular el rendimiento anual de cada uno.

Solución:

- Pagaré A:

```
D = 12.000 - 11.800 = 200 €
```

```
i = 200 / 11.800 * (360 / 120) = 200 / 11.800 * 3 ≈ 0.0508 ≈ 5,08%
```

- Pagaré B:

```
D = 15.000 - 14.850 = 150 €
```

```
i = 150 / 14.850 * (360 / 90) = 150 / 14.850 * 4 ≈ 0.0404 ≈ 4,04%
```

- Conclusión: **Pagaré A** ofrece mayor rendimiento anual.

Resumen

- Las **letras de cambio y pagarés** son instrumentos de crédito negociables.
- El **descuento bancario** permite obtener liquidez antes del vencimiento, calculando el descuento y el valor recibido.
- El **rendimiento efectivo** permite comparar diferentes operaciones y decisiones de inversión.

---

21. Matemática Financiera Internacional

La **Matemática Financiera Internacional** aplica los principios financieros a transacciones que involucran **diferentes monedas y mercados internacionales**. Esta disciplina es fundamental para empresas y bancos que operan globalmente, permitiendo calcular **tipos de cambio, operaciones con monedas extranjeras, intereses y descuentos internacionales**.

21.1 Tipos de cambio

El **tipo de cambio** indica cuántas unidades de una moneda se necesitan para comprar una unidad de otra moneda.

Tipos principales:

1. **Tipo de cambio directo:**
   Indica el número de unidades de moneda local por una unidad de moneda extranjera.
   - Ejemplo: 1 USD = 0,92 EUR (tipo de cambio directo para un país en Europa)
2. **Tipo de cambio indirecto:**
   Indica cuántas unidades de moneda extranjera se obtienen por una unidad de moneda local.
   - Ejemplo: 1 EUR = 1,09 USD
3. **Tipo de cambio al contado (spot):**
   Operación inmediata de compra/venta de divisas.
4. **Tipo de cambio a plazo (forward):**
   Operación de compra/venta de divisas en el futuro, a un tipo pactado.

Ejemplo 1: Conversión de divisas

Si 1 USD = 0,92 EUR, ¿cuántos euros se obtienen por 5.000 USD?

Solución:

```
5.000 USD * 0,92 EUR/USD = 4.600 EUR
```

Ejercicio 1

Si 1 EUR = 1,10 USD, ¿cuántos dólares se obtienen por 2.500 EUR?

Solución:

```
2.500 EUR * 1,10 USD/EUR = 2.750 USD
```

21.2 Operaciones con monedas extranjeras

Al realizar operaciones internacionales, es frecuente **convertir pagos y cobros entre monedas**. Las operaciones pueden involucrar **tipos de cambio spot o forward**, comisiones y ajustes de mercado.

Fórmulas básicas:

- **Conversión directa:**

```
Importe moneda local = Importe moneda extranjera * Tipo de cambio
```

- **Conversión inversa:**

```
Importe moneda extranjera = Importe moneda local / Tipo de cambio
```

Ejemplo 2: Pago internacional

Una empresa debe pagar 10.000 USD a un proveedor en Europa. El tipo de cambio es 1 USD = 0,92 EUR.

Solución:

```
10.000 USD * 0,92 EUR/USD = 9.200 EUR
```

Ejercicio 2

Una empresa recibe 7.500 EUR y el tipo de cambio es 1 EUR = 1,12 USD. ¿Cuánto recibe en dólares?

Solución:

```
7.500 EUR * 1,12 USD/EUR = 8.400 USD
```

Ejercicio 3: Operación forward

Se acuerda un contrato forward de 30 días para comprar 5.000 USD, tipo de cambio forward 1 USD = 0,915 EUR.

Solución:

```
5.000 USD * 0,915 EUR/USD = 4.575 EUR
```

21.3 Interés y descuento en mercados internacionales

En operaciones internacionales, se aplica **interés simple, compuesto o descuento**, ajustado a la moneda extranjera.

Interés simple

```
I = C * i * t
```

Donde:

- `C` = capital inicial
- `i` = tasa de interés por periodo
- `t` = tiempo expresado en años

Interés compuesto

```
VF = C * (1 + i)^t
```

Descuento comercial

```
D = F * d * t
```

Donde:

- `F` = valor nominal del título
- `d` = tasa de descuento
- `t` = tiempo en años

Ejemplo 3: Interés internacional

Una empresa invierte 20.000 USD a 6% anual durante 90 días, interés simple.

Solución:

```
I = 20.000 * 0.06 * (90/360) = 300 USD
```

```
VF = 20.000 + 300 = 20.300 USD
```

Ejercicio 4

Una compañía europea invierte 15.000 EUR a 5% anual durante 180 días (interés simple).

Solución:

```
I = 15.000 * 0.05 * (180/360) = 375 EUR
```

```
VF = 15.000 + 375 = 15.375 EUR
```

Ejercicio 5: Descuento internacional

Un pagaré de 12.000 USD vence en 120 días. La tasa de descuento anual es 8%.

Solución:

```
D = 12.000 * 0.08 * (120 / 360) = 320 USD
```

```
V = 12.000 - 320 = 11.680 USD
```

Ejercicio 6: Conversión y rendimiento

Una empresa recibe un pagaré de 10.000 USD y lo descuenta a 90 días con tasa 9%. El tipo de cambio spot es 1 USD = 0,92 EUR.

Solución:

1. Calcular descuento:

```
D = 10.000 * 0.09 * (90 / 360) = 225 USD
```

```
V = 10.000 - 225 = 9.775 USD
```

2. Convertir a euros:

```
9.775 USD * 0,92 EUR/USD ≈ 8.989 EUR
```

Resumen

- El **tipo de cambio** permite convertir monedas entre diferentes países.
- Las **operaciones con divisas** pueden realizarse al contado o a plazo.
- En mercados internacionales se aplican **interés simple, compuesto y descuento**, adaptados a la moneda extranjera.
- Conocer estos cálculos permite tomar decisiones financieras globales correctas y comparar rendimientos de inversiones en diferentes monedas.

Parte VII: Herramientas y Aplicaciones

22. Uso de Tablas Financieras

Las **tablas financieras** son herramientas que permiten **simplificar cálculos de valor presente, valor futuro y anualidades**, evitando operaciones repetitivas de fórmulas. Son esenciales en **matemática financiera y contabilidad** para evaluar inversiones, préstamos y pagos periódicos.

22.1 Tablas de valor presente (VP)

El **valor presente** (VP) indica **cuánto vale hoy una suma que se recibirá en el futuro**, descontando a una tasa de interés determinada.

Fórmula general:

```
VP = VF / (1 + i)^n
```

Donde:

- `VF` = valor futuro
- `i` = tasa de interés por periodo
- `n` = número de periodos

Las **tablas de VP** muestran factores pre-calculados de `1 / (1 + i)^n` para distintos valores de `i` y `n`. Esto permite calcular VP rápidamente:

```
VP = VF * factor VP
```

Ejemplo 1: Valor presente simple

Se desea conocer el valor presente de 5.000 USD que se recibirán dentro de 3 años a una tasa de 6% anual.

Solución usando tabla:

```
Factor VP (i=6%, n=3) ≈ 0,8396
```

```
VP = 5.000 * 0,8396 ≈ 4.198 USD
```

Ejercicio 1

Calcular el valor presente de 10.000 EUR a 5 años, con tasa de 8% anual.

Solución:

```
Factor VP (i=8%, n=5) ≈ 0,6806
```

```
VP = 10.000 * 0,6806 ≈ 6.806 EUR
```

22.2 Tablas de valor futuro (VF)

El **valor futuro** (VF) indica **cuánto valdrá hoy una suma invertida al cabo de n periodos** con interés compuesto.

Fórmula general:

```
VF = VP * (1 + i)^n
```

Las **tablas de VF** muestran factores `(1 + i)^n` para distintos valores de `i` y `n`:

```
VF = VP * factor VF
```

Ejemplo 2: Valor futuro simple

Invertimos 8.000 USD durante 4 años a una tasa del 7% anual.

Solución usando tabla:

```
Factor VF (i=7%, n=4) ≈ 1,3108
```

```
VF = 8.000 * 1,3108 ≈ 10.486 USD
```

Ejercicio 2

Calcular el valor futuro de 6.500 EUR invertidos a 3 años al 5% anual.

Solución:

```
Factor VF (i=5%, n=3) ≈ 1,1576
```

```
VF = 6.500 * 1,1576 ≈ 7.525 EUR
```

22.3 Tablas de anualidades

Una **anualidad** es un **conjunto de pagos o cobros periódicos iguales** durante n periodos. Las tablas de anualidades permiten calcular **valor presente o valor futuro** de manera rápida.

Fórmulas básicas

1. **Valor presente de una anualidad ordinaria (pagos al final del periodo):**

```
VP = R * [(1 - (1 + i)^-n) / i]
```

2. **Valor futuro de una anualidad ordinaria:**

```
VF = R * [((1 + i)^n - 1) / i]
```

Donde:

- `R` = pago periódico
- `i` = tasa por periodo
- `n` = número de periodos

Las **tablas de anualidades** muestran los factores `[(1 - (1 + i)^-n) / i]` y `[ ((1 + i)^n - 1) / i]` para distintos valores de `i` y `n`.

Ejemplo 3: Valor presente de una anualidad

Se recibirán 1.000 USD al final de cada año durante 5 años, tasa 6% anual.

Solución usando tabla de anualidades:

```
Factor VP anualidad (i=6%, n=5) ≈ 4,2124
```

```
VP = 1.000 * 4,2124 ≈ 4.212 USD
```

Ejercicio 3

Calcular el valor futuro de 500 EUR pagados al final de cada año durante 6 años, tasa anual 5%.

Solución:

```
Factor VF anualidad (i=5%, n=6) ≈ 6,8019
```

```
VF = 500 * 6,8019 ≈ 3.401 EUR
```

Ejercicio 4

Una empresa debe pagar 2.000 USD al final de cada año durante 4 años. Tasa anual 8%. Calcular el valor presente.

Solución:

```
Factor VP anualidad (i=8%, n=4) ≈ 3,3121
```

```
VP = 2.000 * 3,3121 ≈ 6.624 USD
```

Ejercicio 5: Combinación de conceptos

Se planea invertir 3.000 USD al final de cada año durante 5 años, tasa anual 7%.
a) Valor futuro
b) Valor presente

Solución:

a) Valor futuro

```
Factor VF anualidad (i=7%, n=5) ≈ 5,751
```

```
VF = 3.000 * 5,751 ≈ 17.253 USD
```

b) Valor presente

```
Factor VP anualidad (i=7%, n=5) ≈ 4,100
```

```
VP = 3.000 * 4,100 ≈ 12.300 USD
```

Resumen

- Las **tablas financieras** permiten ahorrar tiempo y minimizar errores en cálculos de VP, VF y anualidades.
- **Tablas de VP:** muestran factores `1/(1+i)^n`
- **Tablas de VF:** muestran factores `(1+i)^n`
- **Tablas de anualidades:** permiten calcular rápida y fácilmente valores presentes y futuros de pagos periódicos.
- Su dominio es esencial para **planificación financiera, inversiones y análisis de proyectos**.

---

23. Uso de Calculadoras y Software Financiero

En el mundo financiero moderno, las **herramientas tecnológicas** son indispensables para el análisis, la planificación y la toma de decisiones. Entre las más utilizadas se encuentran las **calculadoras financieras**, las **hojas de cálculo** (como Excel o Google Sheets) y el **software especializado**.
Estas herramientas permiten realizar cálculos complejos con rapidez, precisión y trazabilidad, reduciendo el margen de error humano.

23.1 Calculadoras Financieras

Las **calculadoras financieras** son dispositivos o aplicaciones diseñadas para resolver problemas de interés, anualidades, amortización, valor presente, valor futuro, tasas y periodos.
Algunas de las más comunes son la **HP 10BII**, **Casio FC-200V** y **Texas Instruments BA II Plus**.

Funciones básicas comunes

1. **Cálculo de valor futuro (VF):**

   ```
   VF = VP * (1 + i)^n
   ```

   Donde:

   - `VP`: valor presente
   - `i`: tasa de interés por periodo
   - `n`: número de periodos

2. **Cálculo de valor presente (VP):**

   ```
   VP = VF / (1 + i)^n
   ```

3. **Cálculo de pago de anualidad (R):**

   ```
   R = VP * [i / (1 - (1 + i)^-n)]
   ```

4. **Cálculo de tasa de interés (i):**
   Mediante función `I/Y` o `RATE`, la calculadora resuelve la tasa interna cuando se conocen VP, VF, n o R.

Ejemplo 1: Cálculo con calculadora financiera

Se desea saber cuánto valdrá una inversión de 5.000 EUR dentro de 4 años al 6% anual.

Procedimiento (HP 10BII):

- Introducir `5000` y presionar `PV`
- Introducir `6` y presionar `I/Y`
- Introducir `4` y presionar `N`
- Presionar `FV`

Resultado:

```
VF = 5.000 * (1 + 0,06)^4 = 6.312,38 EUR
```

Ejercicio 1

Un capital de 8.000 USD se invierte a 7% anual durante 5 años. Calcular el valor futuro con una calculadora financiera.

Solución:

```
VF = 8.000 * (1 + 0,07)^5 = 8.000 * 1,4026 = 11.220,8 USD
```

Ejercicio 2

Se desea determinar el pago anual necesario para amortizar un préstamo de 15.000 EUR en 4 años al 8% anual.

Solución:

```
R = 15.000 * [0,08 / (1 - (1 + 0,08)^-4)] = 15.000 * 0,3019 = 4.528,5 EUR
```

23.2 Hojas de Cálculo (Excel, Google Sheets)

Las **hojas de cálculo** permiten automatizar operaciones financieras mediante fórmulas y funciones predefinidas. Son ampliamente utilizadas por empresas, bancos y analistas financieros.

Funciones financieras más utilizadas

1. **VF() → Valor futuro**

   ```
   =VF(tasa; nper; pago; [va]; [tipo])
   ```

   - `tasa`: tasa por periodo
   - `nper`: número de periodos
   - `pago`: monto del pago (si existe)
   - `va`: valor actual
   - `tipo`: 0 si el pago es al final del periodo, 1 si es al inicio

2. **VA() → Valor actual**

   ```
   =VA(tasa; nper; pago; [vf]; [tipo])
   ```

3. **PAGO() → Cuota de préstamo**

   ```
   =PAGO(tasa; nper; va; [vf]; [tipo])
   ```

4. **TASA() → Cálculo de tasa de interés**

   ```
   =TASA(nper; pago; va; [vf]; [tipo]; [estimado])
   ```

Ejemplo 2: Cálculo de valor futuro en Excel

Un inversor coloca 10.000 USD durante 6 años a 5% anual.

En Excel:

```
=VF(0,05; 6; 0; -10000)
```

Resultado:

```
VF = 13.401,30 USD
```

Ejercicio 3

Calcular el valor presente de una deuda de 20.000 EUR que se pagará en 5 años al 9% anual.

En Excel:

```
=VA(0,09; 5; 0; -20000)
```

Resultado:

```
VP = 12.993,50 EUR
```

Ejercicio 4

Determinar la cuota mensual para un préstamo de 50.000 USD a 10 años al 7% anual.

Conversión: tasa mensual = 7% / 12 = 0,00583; n = 120

En Excel:

```
=PAGO(0,00583; 120; 50000)
```

Resultado:

```
R = -580,54 USD/mes
```

El signo negativo indica salida de dinero (pago).

23.3 Software especializado

Además de las calculadoras y hojas de cálculo, existen **programas específicos** para análisis financiero más profundo. Estos sistemas permiten realizar simulaciones, proyecciones, comparaciones de escenarios y valoración de activos.

Ejemplos de software financiero

1. **MATLAB Financial Toolbox:**
   Permite cálculos avanzados de valor temporal, flujos de efectivo, tasas internas de retorno y análisis de riesgo.
2. **R (Finance packages):**
   Ofrece librerías como *quantmod*, *PerformanceAnalytics* y *TTR* para modelado de series temporales financieras.
3. **Python (NumPy, Pandas, FinancePy):**
   Permite automatizar cálculos financieros, crear simuladores de cartera y analizar bonos y acciones.
4. **SAP Treasury & Risk Management:**
   Utilizado por corporaciones para administrar liquidez, riesgos y derivados financieros.
5. **Eikon (Refinitiv) y Bloomberg Terminal:**
   Plataformas profesionales para análisis de mercado, valoración de activos y monitoreo en tiempo real.

Ejemplo 3: Valor futuro con Python

Supongamos un capital de 12.000 USD invertido durante 8 años a una tasa anual de 6%.

Código:

```
VF = 12000 * (1 + 0.06)**8
print(VF)
```

Resultado:

```
VF = 19.099,30 USD
```

Ejercicio 5

Usando la función de Python:

```
VP = VF / (1 + i)**n
```

Calcular el valor presente de 25.000 EUR que se recibirán en 10 años con tasa 7%.

Solución:

```
VP = 25000 / (1 + 0.07)**10 = 25000 / 1,9672 = 12.709,7 EUR
```

Ejercicio 6

En MATLAB, calcular el pago de una anualidad de 100.000 EUR a 5 años con tasa 8% anual.

Código:

```
pago = pmt(0.08,5,100000)
```

Resultado:

```
pago = -25.045,64 EUR
```

Ventajas del software financiero

- Precisión y rapidez en cálculos complejos
- Automatización de reportes
- Escenarios simulados de inversión
- Integración con bases de datos y sistemas contables
- Mayor capacidad de análisis predictivo

Resumen

- Las **calculadoras financieras** son ideales para cálculos rápidos y portátiles.
- Las **hojas de cálculo** ofrecen flexibilidad y visualización clara de flujos financieros.
- El **software especializado** permite análisis de gran escala, proyecciones y optimización de decisiones.
- El dominio de estas herramientas es esencial para **profesionales financieros, contables y analistas de inversiones**.

Síntesis práctica

Herramienta	Nivel de complejidad	Uso principal
Calculadora financiera	Bajo	Cálculos simples y rápidos
Excel / Sheets	Medio	Modelos y simulaciones básicas
Software especializado	Alto	Análisis avanzado y gestión integral

---

Ejercicio final integrado

Una empresa desea comparar tres métodos para una inversión de 10.000 EUR al 6% anual durante 5 años.
a) Calcular con fórmula.
b) Calcular con Excel.
c) Calcular con Python.

Solución:

a) Fórmula manual:

```
VF = 10000 * (1 + 0,06)^5 = 13.382,26 EUR
```

b) Excel:

```
=VF(0,06; 5; 0; -10000)
```

Resultado: 13.382,26 EUR

c) Python:

```
VF = 10000 * (1.06)**5
print(VF)
```

Resultado: 13.382,26 EUR

Los tres métodos ofrecen el mismo resultado; solo cambia la herramienta usada.

24. Casos Prácticos y Aplicaciones

La matemática financiera no se limita a teorías ni fórmulas; su verdadera utilidad se encuentra en las **aplicaciones prácticas** que permiten tomar decisiones económicas racionales. En esta lección estudiaremos cómo aplicar los conceptos aprendidos en **presupuestos personales, créditos, inversiones y evaluación de proyectos financieros**, utilizando métodos cuantitativos y lógicos.

24.1 Presupuesto personal

Un **presupuesto personal** es una herramienta financiera que permite **planificar, controlar y evaluar** los ingresos y gastos de una persona o familia. Su objetivo es garantizar un uso eficiente del dinero, evitar deudas innecesarias y fomentar el ahorro.

Componentes básicos

1. **Ingresos:**
    - Sueldos, comisiones, rentas, intereses, etc.
2. **Gastos fijos:**
    - Vivienda, servicios, transporte, seguros, educación.
3. **Gastos variables:**
    - Ocio, alimentación, compras, viajes, etc.
4. **Ahorro e inversión:**
    - Fondos de emergencia, ahorro previsional o inversiones financieras.

Ejemplo 1: Elaboración de presupuesto

Una persona recibe 2.000 EUR mensuales. Sus gastos son los siguientes:

- Vivienda: 700 EUR
- Alimentación: 400 EUR
- Transporte: 150 EUR
- Servicios: 100 EUR
- Ocio: 150 EUR
- Ahorro: ?

Cálculo:

```
Total gastos fijos y variables = 700 + 400 + 150 + 100 + 150 = 1.500 EUR

Ahorro = 2.000 - 1.500 = 500 EUR
```

Conclusión:
Puede ahorrar 500 EUR mensuales, es decir, un 25% de sus ingresos.

Ejercicio 1

Una persona gana 1.800 EUR al mes. Sus gastos son:
Vivienda 600, alimentación 350, transporte 120, ocio 180, otros 100. ¿Cuál es su ahorro mensual?

Solución:

```
Gastos totales = 600 + 350 + 120 + 180 + 100 = 1.350
```

```
Ahorro = 1.800 - 1.350 = 450 EUR
```

Recomendaciones

- Destinar al menos **10%** de los ingresos al ahorro.
- Evitar créditos para gastos de consumo.
- Revisar el presupuesto cada mes.
- Usar herramientas como **Excel** o **aplicaciones de control financiero personal**.

24.2 Créditos y préstamos

Un **crédito o préstamo** es una operación financiera donde una entidad presta dinero a un individuo o empresa, que deberá devolverlo en cuotas periódicas con intereses.

Elementos básicos

- **Capital (C):** Monto del préstamo.
- **Tasa de interés (i):** Porcentaje aplicado sobre el saldo.
- **Plazo (n):** Número de periodos de pago.
- **Cuota o pago (R):** Importe que se paga periódicamente.

Fórmula de cuota (anualidad ordinaria)

```
R = C * [i / (1 - (1 + i)^-n)]
```

Ejemplo 2: Cálculo de cuota de préstamo

Se solicita un préstamo de 10.000 EUR a 8% anual durante 5 años.

Solución:

```
R = 10.000 * [0,08 / (1 - (1 + 0,08)^-5)]
```

```
R = 10.000 * 0,25046 = 2.504,6 EUR
```

El cliente pagará **2.504,6 EUR anuales** durante 5 años.

Ejercicio 2

Calcular la cuota anual de un préstamo de 15.000 EUR a 6% anual a 4 años.

Solución:

```
R = 15.000 * [0,06 / (1 - (1 + 0,06)^-4)]
```

```
R = 15.000 * 0,28859 = 4.328,85 EUR
```

Ejercicio 3: Costo total del préstamo

Calcular el monto total pagado y los intereses totales del ejercicio anterior.

Solución:

```
Pago total = 4.328,85 * 4 = 17.315,4 EUR
```

```
Intereses totales = 17.315,4 - 15.000 = 2.315,4 EUR
```

Consejos prácticos

- Comparar la **Tasa Anual Equivalente (TAE)** de diferentes entidades.
- Preferir préstamos con **amortización constante** si se dispone de capacidad de pago.
- Evitar refinanciar deudas sin reducir la tasa o el plazo.

24.3 Planificación de inversiones

Invertir es destinar recursos presentes para obtener beneficios futuros.
La **planificación de inversiones** consiste en analizar la rentabilidad esperada, el riesgo y el horizonte temporal.

Parámetros principales

1. **Rentabilidad esperada (r):**
   Rendimiento promedio esperado del capital invertido.

   ```
   r = (Beneficio neto / Inversión inicial) * 100
   ```

2. **Riesgo:**
   Variabilidad o incertidumbre del resultado (se mide con desviación estándar o beta).

3. **Horizonte temporal:**
   Tiempo durante el cual se mantiene la inversión.

4. **Liquidez:**
   Facilidad para convertir la inversión en dinero sin pérdida de valor.

Ejemplo 3: Rentabilidad simple

Una inversión de 5.000 EUR produce un beneficio de 800 EUR al cabo de un año.

Solución:

```
r = (800 / 5.000) * 100 = 16%
```

La rentabilidad anual es del 16%.

Ejercicio 4

Se invierten 12.000 EUR y al año se obtienen 14.400 EUR. Calcular la rentabilidad.

Solución:

```
r = ((14.400 - 12.000) / 12.000) * 100 = 20%
```

Ejercicio 5: Rentabilidad compuesta

Una inversión de 10.000 EUR genera un 7% anual durante 3 años.

Solución:

```
VF = 10.000 * (1 + 0,07)^3 = 12.250,4 EUR
r total = ((12.250,4 - 10.000) / 10.000) * 100 = 22,5%
```

Herramientas útiles para invertir

- **Calculadoras de rentabilidad** (en bancos o portales financieros).
- **Excel**: funciones `VF()`, `TASA()`, `VA()`.
- **Plataformas de inversión**: simuladores de cartera y riesgo.

24.4 Evaluación de proyectos financieros

La **evaluación financiera de proyectos** permite determinar si una inversión es viable.
Los métodos más comunes son:

1. **Valor Actual Neto (VAN)**
2. **Tasa Interna de Retorno (TIR)**
3. **Periodo de recuperación (Payback)**

---

1. Valor Actual Neto (VAN)

El VAN mide el valor presente de los flujos de efectivo descontados a una tasa de interés (costo de capital).

```
VAN = Σ [Ft / (1 + i)^t] - C0
```

Donde:

- `Ft`: flujo neto en el periodo t
- `i`: tasa de descuento
- `C0`: inversión inicial

Ejemplo 4: Cálculo del VAN

Proyecto: inversión inicial 20.000 EUR
Flujos netos anuales: 6.000, 7.000, 8.000, 9.000
Tasa de descuento: 10%

Solución:

```
VAN = -20.000 + (6.000/1,1) + (7.000/1,1^2) + (8.000/1,1^3) + (9.000/1,1^4)
```

```
VAN = -20.000 + 5.455 + 5.785 + 6.006 + 6.147 = 3.393 EUR
```

Conclusión:
El proyecto es **viable** porque el VAN > 0.

---

2. Tasa Interna de Retorno (TIR)

La **TIR** es la tasa que hace que el VAN sea igual a 0.

```
0 = Σ [Ft / (1 + TIR)^t] - C0
```

Si **TIR > tasa de descuento**, el proyecto es rentable.

Ejemplo 5: Cálculo aproximado de la TIR

Proyecto con inversión 15.000 EUR y flujos de 5.000 EUR durante 4 años.

Aproximación manual:

```
VAN ≈ 0 cuando i ≈ 9,5%
```

Conclusión:
Si la tasa exigida es menor que 9,5%, el proyecto conviene.

---

3. Periodo de recuperación (Payback)

Tiempo necesario para recuperar la inversión inicial a partir de los flujos netos.

Ejercicio 6

Inversión inicial 10.000 EUR. Flujos: 3.000, 3.000, 3.000, 3.000.
¿Cuál es el payback?

Solución:

```
10.000 / 3.000 = 3,33 años
```

Ejercicio 7: Evaluación completa

Proyecto:
Inversión inicial: 12.000 EUR
Flujos anuales: 4.000 EUR durante 5 años
Tasa: 8%

a) VAN:

```
VAN = -12.000 + 4.000 * [(1 - (1 + 0,08)^-5) / 0,08]
```

```
VAN = -12.000 + 4.000 * 3,9927 = -12.000 + 15.970,8 = 3.970,8 EUR
```

b) TIR ≈ 13%

c) Payback = 12.000 / 4.000 = 3 años

Conclusión:
El proyecto es **rentable**, pues VAN > 0 y TIR > 8%.

Resumen general

- El **presupuesto personal** permite controlar ingresos y gastos.
- Los **créditos y préstamos** requieren conocer su costo total y comparar tasas.
- La **planificación de inversiones** busca maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo.
- La **evaluación de proyectos** utiliza el VAN, la TIR y el Payback para medir la rentabilidad.

Parte VIII: Anexos

---

25. Glosario de Términos Financieros

El conocimiento de los términos financieros es esencial para comprender y aplicar correctamente los principios de la matemática financiera. A continuación se presentan definiciones clave:

Activo: Bien o derecho que posee una persona o empresa con valor económico.
Amortización: Proceso de pago gradual de una deuda mediante cuotas periódicas.
Anualidad: Serie de pagos o cobros iguales realizados a intervalos regulares.
Bonos: Instrumentos de deuda emitidos por entidades públicas o privadas para obtener financiación.
Capitalización: Proceso mediante el cual los intereses generados se añaden al capital para producir nuevos intereses.
Descuento: Reducción del valor nominal de un documento financiero para calcular su valor actual.
Dividendos: Parte de los beneficios de una empresa que se distribuye entre los accionistas.
Inflación: Aumento generalizado y sostenido de los precios en una economía.
Interés: Costo o ganancia derivada del uso del dinero durante un período determinado.
Liquidez: Capacidad de un activo para convertirse rápidamente en dinero sin pérdida significativa de valor.
Rentabilidad: Relación entre el beneficio obtenido y la inversión realizada.
Tasa de interés: Porcentaje que indica la remuneración del capital en un periodo de tiempo.
Valor presente (VP): Valor actual de una suma que se recibirá en el futuro, descontando los intereses.
Valor futuro (VF): Valor que alcanzará una cantidad de dinero en el futuro mediante la aplicación de una tasa de interés.
Valor nominal: Valor impreso en un documento o título financiero.
Valor efectivo: Valor real de un título considerando descuentos o comisiones.

---

26. Fórmulas Matemáticas Financieras

A continuación se presenta un resumen de las fórmulas financieras más utilizadas:

Interés simple:
$I = C \times i \times n$

Monto o valor futuro (interés simple):
$VF = C \times (1 + i \times n)$

Valor presente (interés simple):
$VP = VF / (1 + i \times n)$

Interés compuesto:
$VF = C \times (1 + i)^n$

Valor presente (interés compuesto):
$VP = VF / (1 + i)^n$

Tasa efectiva anual:
i_e = (1 + i/m)^m - 1

Valor presente de una anualidad:
VP = R × [(1 - (1 + i)^-n) / i]

Valor futuro de una anualidad:
VF = R × [((1 + i)^n - 1) / i]

Descuento simple:
D = N × d × n

Valor actual (descuento simple):
A = N × (1 - d × n)

Rendimiento de un bono:
r = (Interés anual + (Valor nominal - Precio) / n) / ((Valor nominal + Precio) / 2)

Tipo de cambio:
T_c = Moneda nacional / Moneda extranjera

Estas fórmulas son la base de todos los cálculos financieros aplicados en créditos, inversiones, presupuestos y valoración de activos.

---

27. Tablas Financieras

Las **tablas financieras** contienen factores pre-calculados que permiten determinar valores presentes, futuros y anualidades sin necesidad de resolver las fórmulas manualmente.

Ejemplo de tabla de valor presente (VP = 1 / (1 + i)^n)

i \ n	1	2	3	4	5
5%	0.952	0.907	0.864	0.823	0.784
6%	0.943	0.890	0.840	0.792	0.747
8%	0.926	0.857	0.794	0.735	0.681

Ejemplo de tabla de valor futuro (VF = (1 + i)^n)

i \ n	1	2	3	4	5
5%	1.050	1.102	1.158	1.216	1.276
6%	1.060	1.124	1.191	1.262	1.338
8%	1.080	1.166	1.260	1.361	1.469

Estas tablas permiten obtener de forma rápida los factores multiplicadores necesarios para el cálculo de VP o VF.

---

28. Ejercicios y Problemas Resueltos

Ejercicio 1: Cálculo de valor futuro compuesto

Un capital de 5.000 EUR se invierte durante 4 años al 7% anual compuesto.
Calcular el valor futuro.

Solución:

VF = 5.000 × (1 + 0.07)^4 = 5.000 × 1.3108 = 6.554 EUR

Ejercicio 2: Cálculo del valor presente

Calcular el valor presente de 10.000 USD que se recibirán dentro de 3 años con una tasa del 8%.

Solución:

VP = 10.000 / (1 + 0.08)^3 = 10.000 / 1.2597 = 7.940 USD

Ejercicio 3: Valor presente de una anualidad

Se reciben 2.000 EUR al final de cada año durante 5 años con tasa anual del 6%.

Solución:

VP = 2.000 × [(1 - (1 + 0.06)^-5) / 0.06]
VP = 2.000 × 4.2124 = 8.425 EUR

Ejercicio 4: Valor futuro de una anualidad

Se depositan 1.000 USD al final de cada año durante 6 años con tasa del 8%.

Solución:

VF = 1.000 × [((1 + 0.08)^6 - 1) / 0.08]
VF = 1.000 × 7.336 = 7.336 USD

Ejercicio 5: Rendimiento de un bono

Un bono tiene valor nominal de 1.000 EUR, paga 80 EUR anuales y se compra por 950 EUR. Se vence en 5 años.

Solución:

r = (80 + (1.000 - 950) / 5) / ((1.000 + 950) / 2)
r = (80 + 10) / 975 = 0.0923 = 9,23%

Ejercicio 6: Tipo de cambio

Si 1 euro equivale a 1,12 dólares, calcular cuántos dólares recibirá una persona que cambia 2.500 EUR.

Solución:

2.500 × 1,12 = 2.800 USD

Ejercicio 7: Descuento de un pagaré

Un pagaré de 3.000 EUR vence en 180 días y se descuenta al 12% anual.

Solución:

D = 3.000 × 0.12 × (180/360) = 180 EUR
Valor actual = 3.000 - 180 = 2.820 EUR

---

29. Bibliografía Recomendada

1. **Gitman, L. J.** *Principios de Administración Financiera*. Pearson Educación.
2. **Ross, S. A., Westerfield, R., Jaffe, J.** *Finanzas Corporativas*. McGraw-Hill.
3. **Brigham, E. F., Houston, J. F.** *Fundamentos de Administración Financiera*. Cengage Learning.
4. **Van Horne, J. C.** *Teoría Financiera y Política Empresarial*. Prentice Hall.
5. **Brealey, R., Myers, S.** *Principles of Corporate Finance*. McGraw-Hill.
6. **Block, S., Hirt, G.** *Fundamentos de Inversiones*. McGraw-Hill.
7. **Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A.** *Inversiones*. McGraw-Hill.
8. **Luenberger, D. G.** *Investment Science*. Oxford University Press.
9. **Fabozzi, F. J.** *Bond Markets, Analysis, and Strategies*. Pearson Education.
10. **Mishkin, F. S.** *Economía del Dinero, Banca y Mercados Financieros*. Pearson.

Conclusión

La **Parte VIII: Anexos** sirve como guía práctica de referencia para reforzar los conocimientos adquiridos en las unidades anteriores.
El glosario clarifica conceptos, las fórmulas facilitan cálculos, las tablas agilizan operaciones y los ejercicios aplican los conocimientos a situaciones reales.
La bibliografía recomendada proporciona bases teóricas sólidas y complementarias para el estudio avanzado de la **matemática financiera**.

Epílogo

Llegar al final de este libro no significa concluir un camino, sino abrir las puertas a nuevas formas de comprender y aplicar las matemáticas financieras. A lo largo de estas páginas hemos recorrido los fundamentos que permiten entender el valor del dinero en el tiempo, las tasas de interés, las amortizaciones, las rentas y otros conceptos esenciales que sustentan la economía cotidiana y empresarial. Pero más allá de las fórmulas y los cálculos, el verdadero objetivo ha sido fomentar una manera de pensar: lógica, analítica y consciente.

Las matemáticas financieras no son solo una herramienta técnica; son un lenguaje que nos permite interpretar la realidad económica y tomar decisiones informadas. En un mundo donde la información y las oportunidades se mueven con rapidez, dominar este lenguaje es también una forma de libertad. Quien comprende el funcionamiento del dinero y sus leyes no depende de la suerte, sino de su propio juicio.

Este libro nació con el propósito de compartir conocimiento, porque el saber solo cobra sentido cuando se transmite. Si estas páginas han logrado despertar tu curiosidad, ayudarte a entender mejor tu entorno o motivarte a seguir aprendiendo, entonces su misión está cumplida.

Quiero cerrar estas líneas con un profundo agradecimiento a todas las personas que creen en el valor del estudio y del esfuerzo, y especialmente a Marisa, cuya presencia y apoyo incondicional han acompañado cada etapa de este proyecto. Su paciencia y su fe en mí han sido el motor silencioso que ha hecho posible que estas ideas se transformen en palabras y que las palabras den forma a este libro.

Que este sea solo el comienzo de un viaje continuo hacia el conocimiento y la libertad que otorga comprender.